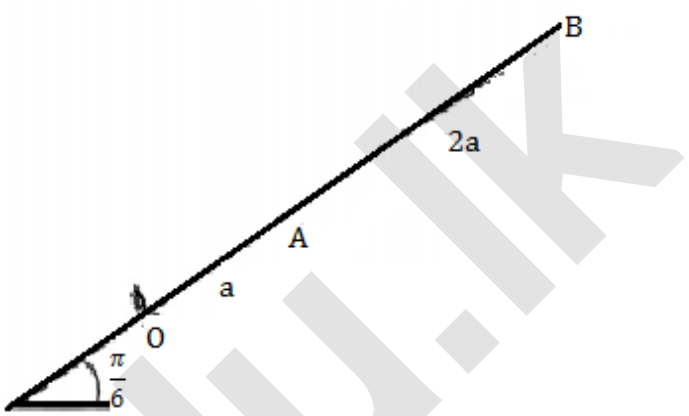
Simple Harmonic Motion (SHM)

கடந்த கால வினாக்களும் விடைகளும், மேலதிக பயிற்சிகளும் (2000-2019)

MSM Usama BSc
AK/AL-Hamra Maha Vidyalaya Oluvil
0772273791

அனைத்து பயிற்சிகளையும் செய்வீர்கள் ஆயின் எதிர்வரும் 2020 ஆண்டு நடைபெறும் பரீட்சையில் பூரணமாக விடையளித்து முழுமையான புள்ளிகளை பெறுவீர்கள்.

1. கிடையுடன் கோணம் $\frac{\pi}{6}$ இற் சாய்ந்த ஓர் ஒப்பமான நிலைத்த தளத்தின் ஓர் அதியுயர் சரிவுக் கோட்டின் மீது O ஆனது ஆகவும் கீழே உள்ள புள்ளியாக இருக்க O, A, B ஆகிய புள்ளிகள் அதே வரிசையில் $OA = a$ ஆகவும் இருக்குமாறு உள்ளன. இற்கை நீளம் a ஐயும் மீள்தன்மை மட்டு mg ஐயும் உடைய ஓர் இலேசான மீள்தன்மை இழையின் ஒரு நுனி புள்ளி O உடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கும் அதே வேளை மற்றைய நுனி திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P உடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. துணிக்கை P ஆனது புள்ளி B ஐ அடையும் வரைக்கும் இழை கோடு OAB வழியே இழுக்கப்படுகின்றது. அதன் பின்னர் துணிக்கை P ஒய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றது. B இலிருந்து A வரைக்கும் P இன் இயக்கச் சமன்பாடானது $0 \leq x \leq 2a$



இற்கு $\ddot{x} + \frac{g}{a}\left(x + \frac{a}{2}\right) = 0$ இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டுக. இங்கு $AP = x$ ஆகும்.

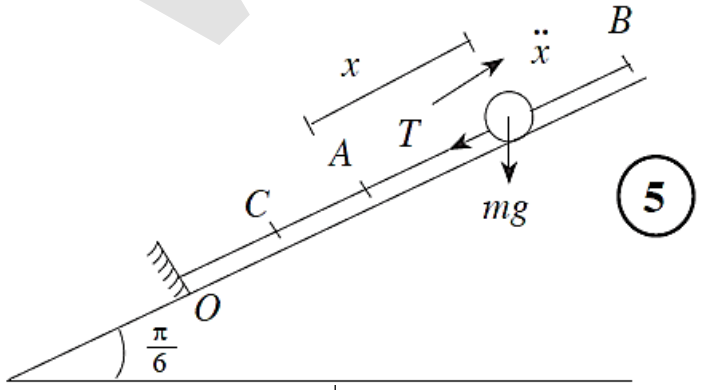
$y = x + \frac{a}{2}$ எனக் கொண்டு மேற்குறித்த இயக்கச் சமன்பாட்டினை $\frac{a}{2} \leq y \leq \frac{5a}{2}$ இற்கு வடிவம் $\ddot{y} + \omega^2 y = 0$ இல் மறுபடியும் எழுதுக: இங்கு $\omega = \sqrt{\frac{g}{a}}$.

மேற்குறித்த எளிய இசை இயக்கத்தின் மையத்தைக் கண்டு சூத்திரம் $\dot{y}^2 = \omega^2(c^2 - y^2)$ ஐப் பயன்படுத்தி வீச்சம் c ஐயும் A ஐ அடையும்போது P இன் வேகம் $\sqrt{7ga}$ எனக் காட்டுக.

B இலிருந்து O இற்கு இயங்குவதற்கு P எடுக்கும் நேரம் $\sqrt{\frac{g}{a}}\left\{cos^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) + 2k\right\}$

எனவும் காட்டுக: இங்கு $k = \sqrt{7} - \sqrt{6}$

துணிக்கை P ஆனது O ஐ அடையும்போது அது தளத்திற்குச் செங்குத்தாக O இல் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ள ஓர் ஒப்பமான தடுப்புடன் மோதுகின்றது. P இற்கும் தடுப்புக்குமிடையே உள்ள மீளமைவுக் குணகம் e ஆகும் $0 < e \leq \frac{1}{\sqrt{7}}$ எனின், பின்னர் நிகழும் P இன் இயக்கம் எளிமை இசை இயக்கமன்று எனக் காட்டுக.



P இன் இயக்கச்சமன்பாடு : $F = ma$

$\pi/6$

$T - mg\left(\frac{1}{2}\right) = mg(-\ddot{x})$

$T = mg\left(\frac{x}{a}\right)$

$\ddot{x} + \frac{g}{a}\left(x + \frac{a}{2}\right) = 0$ இங்’கு $0 \leq x \leq 2a$

$y = x + \frac{a}{2}$. $\ddot{y} = \ddot{x}$, என எழுதின் (5)

$\ddot{y} + \omega^2 y = 0$, $\frac{a}{2} \le y \le \frac{5a}{2}$. (5)

இங்கு $\omega^2 = \frac{g}{a}$.

10

எழிமை இசை இயக்கத்தின் மையம் C ஆனது $\ddot{x} = 0$. i.e. $y = 0$ or $x = \frac{-a}{2}$. (5) + (5)

$OC = \frac{a}{2}$, ஆகுமாறு OA இல் புள்ளி C உள்ளது (OA இன் நடுப்புள்ளி)

வீச்சம் c :

$\dot{y}^2 = \omega^2(c^2 - y^2)$, இங்கு $\omega^2 = \frac{g}{a}$.

$y = \frac{5a}{2}$ (at B). ஆக $\dot{y} = 0$ (5)

$\therefore 0 = \omega^2\left(c^2 - \left(\frac{5a}{2}\right)^2\right) \Rightarrow c = \frac{5a}{2}$. (5)

பொருள் A ஐ அடையும் போது கதி v என்க

A இல் $y = \frac{a}{2}$, $v^2 = \frac{g}{a}\left(\left(\frac{5a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)$. (5) + (5)

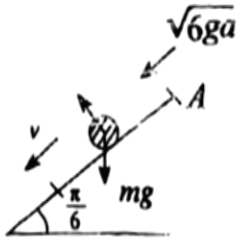
$\Rightarrow v = \sqrt{6ga}$. (5)

35

<u>A இலிருந்து O க்கு P இன் இயக்கம்</u>

இயக்கம் தளத்தில் புவியீர்ப்பின் கீழ் உள்ளது

$v^2 = u^2 + 2fs$: ஐ பிரயோகிக்க



$\swarrow v^2 = 6ga + 2\left(\frac{a}{2}\right).a$ (5)

$\therefore v^2 = 7ga$

$\therefore v = \sqrt{7ga}$ (5)

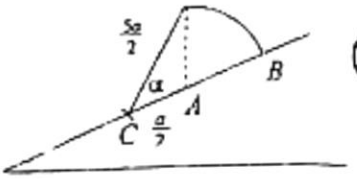
10

www.ikdu.lk

எழிமை இசை இயக்கத்தின் இன் கீழ் B இலிருந்து A ஐ அடைய P எடுத்துக் கொண்ட நேரம்

$\omega t_1 = \alpha$. (5) எனவே $\cos\alpha = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{5a}{2}} = \frac{1}{5}$. (5)

$\therefore t_1 = \sqrt{\frac{a}{g}}\left(\cos^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)\right)$. (5)



(5)

A யிலிருந்து O க்கு செல்ல எடுத்த நேரம்

$v = u + at$: இனை பிரயோகிக்க (5)

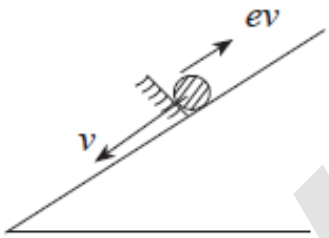
$\therefore \sqrt{7ga} - \sqrt{6ga} = \frac{g}{2}t_2$

$\therefore t_2 = \sqrt{\frac{a}{g}}(\sqrt{7} - \sqrt{6})$ (5) $= 2k\sqrt{\frac{a}{g}}$, இங்கு $k = \sqrt{7} - \sqrt{6}$.

B இலிருந்து O க்கு மொத்த நேரம் (5)

$t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{a}{g}}\left(\cos^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) + 2k\right)$, இங்கு $k = \sqrt{7} - \sqrt{6}$.

35



O இலுள்ள அழுத்தமான தடுப்பை தாக்கிய உடனின் P இன் வேகம் (5)

$ev = e\sqrt{7gh}$



துணிக்கையின் தொடர்ந்து வரும் இயக்கம் எழிமை இசை இயக்கமாய் இராது $0 < z \leq a$, இங்கு z ஆனது புவியீர்ப்பின் கீழ் தளத்தில் மேல் நோக்கி சென்ற தூரம் எனின் (10)

Applying $v^2 = u^2 + 2as$:

$\nearrow \quad 0 = (ev)^2 - 2\left(\frac{g}{2}\right)z$ (5)

$\Rightarrow \quad z = 7e^2a$ (5)

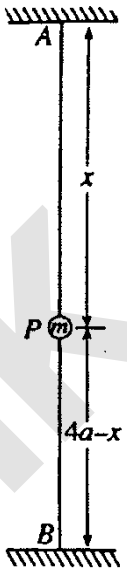
Now, $0 < z \leq a$

$\Leftrightarrow \quad 0 < 7e^2a \leq a$ (5)

$\Leftrightarrow \quad 0 < e \leq \frac{1}{\sqrt{7}}$. (5)

www.ikdu.lk

2. திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P ஆனது ஒவ்வொன்றும் இயற்கை நீளம் a ஐயும் மட்டு mg ஐயும் உடைய இரு இலேசான சம மீள்தன்மை இழைகளின் இரு நுனிகளுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. ஓர் இழையின் சுயாதீன நுனி ஒரு நிலைத்த புள்ளி A உடனும் மற்றைய இழையின் சுயாதீன நுனி A இற்கு நிலைக்குத்தாகக் கீழே தூரம் $4a$ இல் இருக்கும் ஒரு நிலைத்த புள்ளி B உடனும் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. (வரிப்படத்தை பார்க்க) இரு இழைகளும் இறுக்கமாக இருக்க A இற்குக் கீழே தூரம் $\frac{5a}{2}$ இல் துணிக்கை நாப்பத்திலே இருக்குமெனக் காட்டுக.



துணிக்கை P இப்போது AB இன் நடுப்புள்ளிக்கு உயர்த்தப்பட்டு அத்தானத்தில் ஓய்விலிருந்து மெதுவாக விடுவிக்கப்படுகின்றது. இரு இழைகளும் இறுக்கமாகவும் இழை AP இன் நீளம் x ஆகவும் இருக்கும் போது $\ddot{x} = +\frac{2g}{a}\left(x - \frac{5a}{2}\right) = 0$ எனக் காட்டுக.

இச்சமன்பாட்டினை வடிவம் $\ddot{X} + \omega^2 X = 0$ இல் மீண்டும் எழுதுக, இங்கு $X = x - \frac{5a}{2}$ உம் $\omega^2 = \frac{2g}{a}$ உம் ஆகும்.

சூத்திரம் $X^2 = \omega^2(c^2 - X^2)$ ஐப் பயன்படுத்தி இவ்வியக்கத்தின் வீச்சம் C ஐக் காண்க. துணிக்கை P அதன் மிகத் தாழ்ந்த தானத்தை அடையும் கணத்தில் இழை PB வெட்டப்படுகின்றது.

புதிய இயக்கத்தில் $x = a$ ஆக இருக்கும் போது துணிக்கை அதன் அதியுயர் தானத்தை அடைகின்றதெனக் காட்டுக.

மேலும் துணிக்கை P ஆனது $x = 2a$ இல் உள்ள அதன் தொடக்கத் தானத்திலிருந்து கீழ்முகமாகத் தூரம் a இற்கும் பின்பு மேன்முகமாகத் தூரம் $\frac{a}{2}$ இற்கும் செல்வதற்கு எடுக்கும் மொத்த நேரம் $\frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{a}{2g}}\left(3+\sqrt{2}\right)$ என மேலும் காட்டுக.

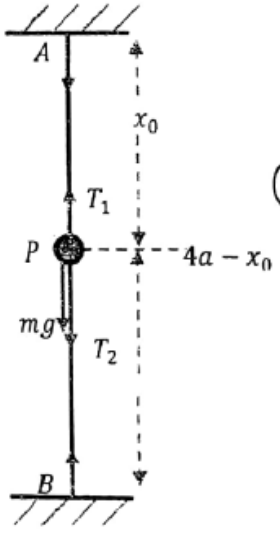
சமநிலைத்தானத்தில் $x = x_0$ என்க.

↑ $T_1 = T_2 + mg$ — 5

$\frac{mg}{a}(x_0 - a) = \frac{mg}{a}(4a - x_0 - a) + mg$ — 5

$x_0 - a = 3a - x_0 + a$

$\Rightarrow x_0 = \frac{5a}{2}$. — 5



5

P இற்கு $\underline{F} = m\underline{a}$ பிரயோகிக்க

↓ $T_2' + mg - T_1' = m\ddot{x}$ — 5

$\frac{mg}{a}(4a - x - a) + mg - = \frac{mg}{a}(x - a) = m\ddot{x}$ — 10

20

$$\Rightarrow \ddot{x} = -\frac{2g}{a}\left(x - \frac{5a}{2}\right)$$

$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{2g}{a}\left(x - \frac{5a}{2}\right) = 0$. (5)

$X = x - \frac{5a}{2}$; $\omega^2 = \frac{2g}{a}$

எனவே $\ddot{X} + \omega^2 X = 0$. (5)

S.H.M. இன் மையம் $x = \frac{5a}{2}$. (5)

$\dot{X}^2 = \omega^2(c^2 - X^2)$, இங்கு c வீச்சமாகும்.

$\dot{X} = 0$, ஆக $X = -\frac{a}{2}$ (5)

பிரதியிட:

$0 = \omega^2\left(c^2 - \frac{a^2}{4}\right)$: $c = \frac{a}{2}$ (10)

$\therefore$ அதி தாழ்ந்த தானம்: $X = \frac{a}{2} \Rightarrow x = 3a$. (5)

50

இழை PB ஐ வெட்டிய பின் $F = ma$

$mg - T = m\ddot{x}$

$mg - \frac{mg}{a}(x - a) = m\ddot{x}$ (5)

$\ddot{x} + \frac{g}{a}(x - 2a) = 0 \Rightarrow$ (5) $\quad \ddot{Y} + \Omega^2 Y = 0$, இங்கு $Y = x - 2a$; $\Omega^2 = \frac{g}{a}$. (5) (5)

புதிய S.H.M. இன் மையம் $x = 2a$. (5)

www.ikdu.lk

$\dot{Y}^2 = \Omega^2(b^2 - Y^2)$, இங்கு b வீச்சம்

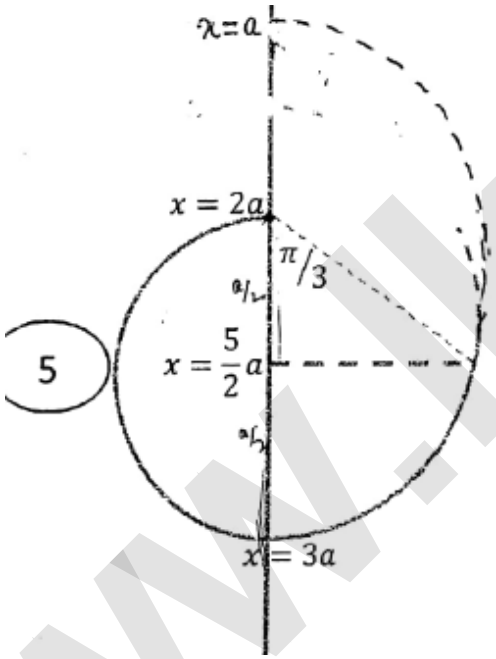
இழை PB ஐ வெட்டிய சற்றுப் பின் $\dot{Y} = 0$; $x = 3a$ (5)

$Y = a$ இல் $\dot{Y} = 0$ (5)

∴ புதிய S.H.M. இன் வீச்சம் a ஆகும் (5)

மீண்டும் Y=-a இல் $\dot{Y} = 0$ ஆகும் $\Rightarrow$ $x = a$

அதாவது $x = a$ இல் துணிக்கை அதியுயர் தானத்தை அடையும் (5)



(10)

(5)

$x = 2a$ இலிருந்து $x = 3a$ இற்கு கீழ்முகமாக இயங்க எடுக்கும் நேரம் $: \frac{\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{a}{2g}}$ (5)

$x = 3a$ இலிருந்து $x = \frac{5a}{2}$ இற்கு மேல்முகமாக இயங்க எடுக்கும் நேரம் $: \frac{\pi}{3\Omega} = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{a}{g}}$ (10)

$$\text{Total time} = \pi\sqrt{\frac{a}{2g}} + \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{a}{g}}$$

(5)

$$= \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{a}{2g}}(3+\sqrt{2}).$$

www.ikdu.lk

3. இயற்கை நீளம் a ஐயும் மீள்தன்மை மட்டு mg யையும் உடைய ஓர் இலேசான மீள்தன்மை இழையின் ஒரு நுணி ஓர் ஒப்பமான கிடை நிலத்திற்கு மேலே ஓர் உயரம் $3a$ இல் உள்ள ஒரு நிலைத்த புள்ளி O உடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கும் அதேவேளை மற்றைய நுணி திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கையுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. துணிக்கை O இற்குக்கிட்ட வைக்கப்பட்டு, கதி $\sqrt{ga}$ உடன் நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கி எறியப்படுகின்றது. இழையின் நீளம் x ஆனது $a \le x < 3a$ இற்குச் சமன்பாடு $\ddot{x} + \frac{g}{a}(x - 2a) = 0$ ஐத் திருப்தியாக்குகின்றதெனக் காட்டி, இவ்வெளிய இசை இயக்கத்தின் மையத்தைக் காண்க.

நிலத்துடனான முதல் மொத்தல் வரைக்கும் துணிக்கையின் கீழ்முக இயக்கத்திற்குச் சக்திக்காப்புக்கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி $a \le x < 3a$ இற்கு $\dot{x}^2 = \frac{g}{a}(4ax - x^2)$ எனக் காட்டுக.

$x = x - 2a$ எனக்கொண்டு இறுதிச்சமன்பாட்டை $-a \le x < a$ இற்கு வடிவம் $\dot{x}^2 = \frac{g}{a}(A^2 - x^2)$ எனக் காட்டுக.

$X = x - 2a$ எனக்கொண்டு இறுதிச் சமன்பாட்டை $-a \le X < a$ இற்கு வடிவம் $\dot{x}^2 = \frac{g}{a}(A^2 - x^2)$ இல் எடுத்துரைக்க: இங்கு A ஆனது துணியப்படவேண்டிய வீச்சமாகும்.

நிலத்துடனான முதல் மொத்தலுக்குச் சற்று முன்னர் துணிக்கையின் வேகம் யாது?

துணிக்கைக்கும் நிலத்துக்குமிடையே உள்ள மீளமைவுக் குணகம் $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ஆகும். முதல் மொத்தலுக்குப்பின்னர் இழை தளரும் வரைக்கும் துணிக்கையின் மேன்முக இயக்கத்திற்கு $-a \le X < a$ இற்கு $\dot{x}^2 = \frac{g}{a}(B^2 - x^2)$ என தரப்பட்டுள்ளது: இங்கு B ஆனது இப்புதிய எளிய இசை இயக்கத்தின் துணியப்பட வேண்டிய வீச்சமாகும். துணிக்கை மேலே விபரித்த எளிய இசை இயக்கங்களைக் கீழ்முகமாகவும் மேன்முகமாகவும் ஆற்றும் மொத்த நேரம் $\frac{5\pi}{6}\sqrt{\frac{a}{g}}$ எனக் காட்டுக.

$a \le x < 3a$: ஆக $T = \frac{mg}{a}(x - a)$ (5)

$\underline{F} = m\underline{a}$: படி

For $m \downarrow$; $mg - T = m\ddot{x}$ (10)

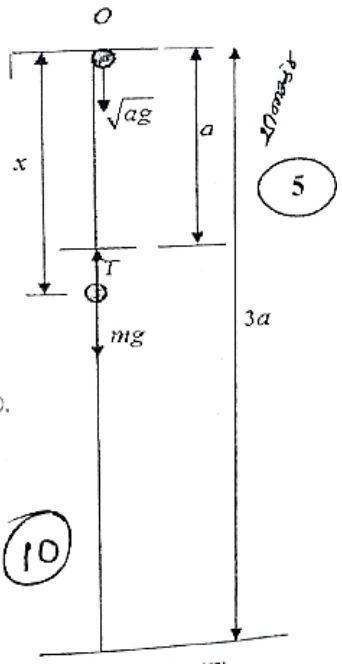
$\Rightarrow mg - \frac{mg}{a}(x - a) = m\ddot{x}$

$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{g}{a}(x - 2a) = 0$. (5)

$\ddot{x} = 0$ ஆக அலைவு மையம் பெறப்படும் $\Rightarrow x = 2a$.

எனவே அலைவு மையம் C ஆனது

O இற்கு நிலைக்குத்தாக கீழே $OC = 2a$ ஆகுமாறு இருக்கும்.



(5)

சக்திக்காப்புத் தத்துவப்படி

$\frac{1}{2}m(ga) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgx + \frac{1}{2}mg\frac{(x-a)^2}{a}$ (20) (10)

$ga = \dot{x}^2 - 2gx + \frac{g}{a}(x^2 - 2ax + a^2)$

$\dot{x}^2 = ga + 2gx - \frac{g}{a}x^2 + 2gx - ga$

$a \le x < 3a$ ஆக $\dot{x}^2 = \frac{g}{a}(4ax - x^2)$ (5)

www.ikod.lk

$X = x - 2a \Rightarrow \dot{X} = \dot{x}$ (5)

மேலும் $a \le x < 3a \Leftrightarrow -a \le X < a.$

$\dot{X}^2 = \frac{g}{a}\{4a(X+2a) - (X+2a)^2\}$ (5)

$= \frac{g}{a}\{4a^2 - X^2\}$ for $-a \le X < a$ (5)

$\therefore A = 2a.$ (5)

20

மொத்தலுக்கு சற்று முன் துணிக்கையின் வேகம் v என்க.

$\Rightarrow v^2 = \frac{g}{a}(4a^2 - a^2) = 3ga$ (5)

$\therefore v = \sqrt{3ga}.$ (5)

நியூட்டனின் பரிசோதனை விதிப்படி,

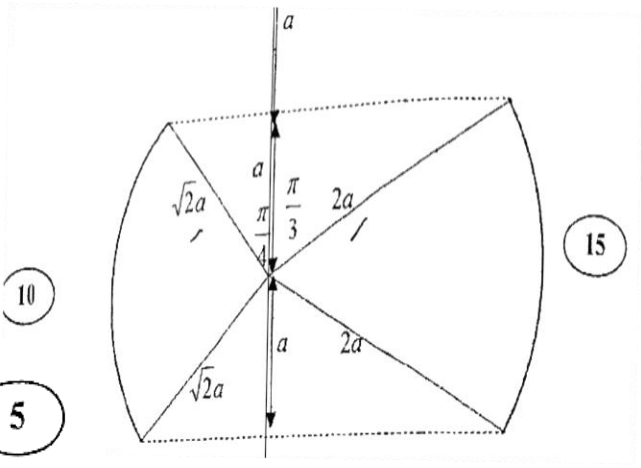
மொத்தலுக்கு சற்று பின் துணிக்கையின் வேகம் $= \sqrt{ga}\ \left(\because e = \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$ (10)

$\dot{X}^2 = \frac{g}{a}(B^2 - X^2)$

$X = a$ ஆகும் பொழுது

$ga = \frac{g}{a}(B^2 - a^2)$ (5)

$\Rightarrow B = \sqrt{2}a.$ (5)



15

10

$\sqrt{\frac{g}{a}}t_1 = \frac{\pi}{3}, \quad \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{a}{g}}.$ (5)

$\sqrt{\frac{g}{a}}t_2 = \frac{\pi}{2}, \Rightarrow t_2 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}.$ (5)

$\therefore t_1 + t_2 = \frac{5\pi}{6}\sqrt{\frac{a}{g}}.$ (5)

4. இயற்கை நீளம் a ஐயும் மீள்தன்மை மட்டு $4mg$ ஐயும் உடைய ஓர் இலேசான மீள்தன்மை இழையின் ஒரு நுனி ஒரு நிலைத்த புள்ளி O உடனும் மற்றைய நுனி திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P உடனும் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. துணிக்கை P ஆனது O இல் ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றது. துணிக்கை P புள்ளி A இனூடாக செல்லும்போது அதன் வேகத்தைக் காண்க. இங்கு $OA = a$ இழையின் நீளம் $x(\geq a)$ ஆனது சமன்பாடு $\ddot{x} + \frac{4g}{a}\left(x - \frac{5a}{4}\right) = 0$ ஐத் திருப்தியாக்குகின்றதெனக் காட்டுக.

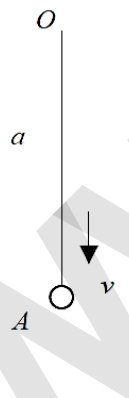
$X = x - \frac{5a}{4}$ எனக் கொண்டு மேற்குறித்த சமன்பாட்டை வடிவம் $\ddot{X} + \omega^2 X = 0$ இல் எடுத்துரைக்க இங்கு $\omega = (> 0)$ ஆனது துணியப்படவேண்டிய ஒரு மாறிலியாகும்.

இச்சமன்பாடு $X^2 = \omega^2(c^2 - x^2)$ ஐத் தருகின்றதெனக் கொண்டு இவ்வெளியே இசை இயக்கத்தின் வீச்சம் c ஐக் காண்க.

துணிக்கை P அடையும் மிகத்தாழ்ந்த புள்ளி L எனக் கொள்வோம். A இலிருந்து L இற்கு இயங்குவதற்கு P எடுக்கும் நேரம் $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\left[\pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right]$ எனக் காட்டுக.

துணிக்கை P ஆனது L இல் இருக்கும் கணத்தில் திணிவு $\lambda m(1 \leq \lambda < 3)$ஐ உடைய வேறொரு துணிக்கை மெதுவாக P உடன் இணைக்கப்படுகின்றது. திணிவு $(1+\lambda)m$ ஐ உடைய சேர்த்தித் துணிக்கையின் இயக்கச் சமன்பாடு $\ddot{x} + \frac{4g}{(1+\lambda)a}\left\{x - (5+\lambda)\frac{a}{4}\right\} = 0$ எனக் காட்டுக.

சேர்த்தித் துணிக்கை வீச்சம் $(3-\lambda)\frac{a}{4}$ உடன் முழு எளிய இசை இயக்கத்தை ஆற்றுகின்றதென மேலும் காட்டுக.

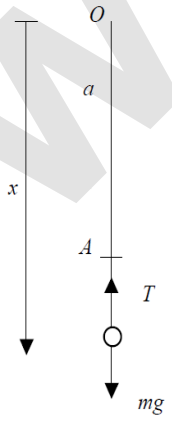


புவியீர்ப்பின் கீழான P இன் இயக்கத்திற்கு O இலிருந்து A இற்கு:

$v^2 = 2ga \Rightarrow v = \sqrt{2ag}$. (5)

இழையில் இழுவை : $T = \frac{4mg(x-a)}{a}, x \geq a$ (5)

$F = ma$: $-T + mg = m\ddot{x}$ (5)



T ஐ நீக்க : $-4mg\frac{(x-a)}{a} + mg = m\ddot{x}$ (5)

$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{4g}{a}(x-a) = \frac{4g}{a}.\frac{a}{4}$

$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{4g}{a}\left(x - \frac{5a}{4}\right) = 0$ ---------- (1) (5)

www.ikau.lk

$X = x - \frac{5a}{4} \Rightarrow \dot{X} = \dot{x}$, $\ddot{X} = \ddot{x}$. (5)

(1) இன் $\ddot{X} + \frac{4g}{a}X = 0.$

மேலும் $\ddot{X} + \omega^2 X = 0$; இங்கு $\omega = 2\sqrt{\frac{g}{a}}$. $(\because \omega > 0)$

(5) (5)

$\Rightarrow \dot{X}^2 = \omega^2(c^2 - X^2)$ ---------- (2)

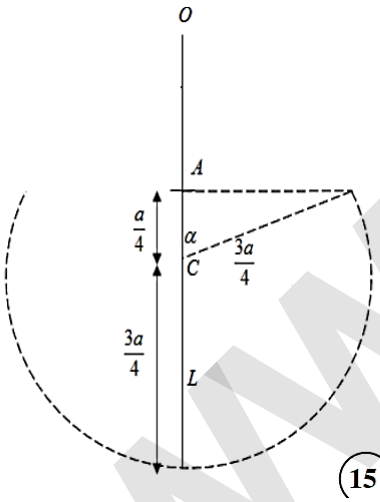
$x = a$ ஆகும்போது $\dot{x} = \sqrt{2ga}$ $\Rightarrow \dot{X}^2 = 2ga$, $X = -\frac{a}{4}$

(5) (5)

$(2) \Rightarrow 2ga = \frac{4g}{a}\left[c^2 - \left(\frac{-a}{4}\right)^2\right]$ (5)

$\Rightarrow a^2 = 2c^2 - \frac{a^2}{8} \Rightarrow c^2 = \frac{9a^2}{16}$ $\Rightarrow c = \frac{3a}{4}$ $(\because c > 0)$ (5)

இயக்க மையம் $X = 0$; $x = \frac{5a}{4}$. (5)



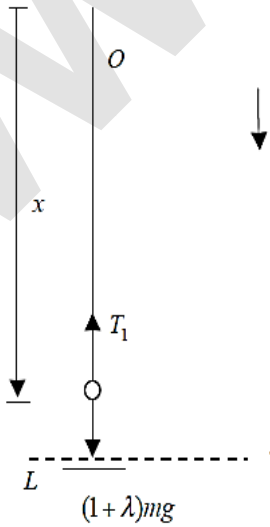
$AL = \frac{a}{4} + \frac{3a}{4} = a.$ (5)

$\cos\alpha = \frac{1}{3}$ (5)

A இலிருந்து L இற்கு எடுத்த நேரம் $= \frac{\pi - \alpha}{\omega}$ (5)

$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\left\{\pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right\}$. (5)

15 35



$T_1 = \frac{4mg(x-a)}{a}$

கூட்டுத் துணிக்கை $\underline{F} = m\underline{a}$: $(1+\lambda)mg - T_1 = (1+\lambda)m\ddot{x}$

$(1+\lambda)mg - \frac{4mg}{a}(x-a) = (1+\lambda)m\ddot{x}$ (10) (5)

$\ddot{x} + \frac{4g}{(1+\lambda)a}(x-a) - g = 0$

(5)

$\ddot{x} + \frac{4g}{(1+\lambda)a}\left\{(x-a) - (1+\lambda)\frac{a}{4}\right\} = 0$

$\ddot{x} + \frac{4g}{(1+\lambda)a}\left\{x - (5+\lambda)\frac{a}{4}\right\} = 0$ (5)

25

www.lkdu.lk



மையம் C_1: $x = OC_1 = (5+\lambda)\frac{a}{4}$ (5)

$C_1L = 2a - (5+\lambda)\frac{a}{4}$ (5)

$= (3-\lambda)\frac{a}{4}$ (5)

புதிய வீச்சம் $c_1 = (3-\lambda)\frac{a}{4}$ (>0) $\because \lambda < 3.$

பூரண எ.இ.இ. ஆக இருந்தால் மட்டுமே $\Leftrightarrow$ $AC_1 \geq c_1$ (5)

$(5+\lambda)\frac{a}{4} - a \geq (3-\lambda)\frac{a}{4}$

$5+\lambda-4 \geq 3-\lambda$

$\lambda \geq 1$ (5)

மற்றுமுறை:

$X = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ என்க. இங்கு A, B தீர்மானிக்கப்பட வேண்டியவை.

$\Rightarrow \dot{X} = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t.$ (5)

$t = 0$, $x = a$ ஆகும்போது $X = -\frac{a}{4}$, $\dot{X} = V = \sqrt{2ga}$.

$\therefore \quad -\frac{a}{4} = A, \; V = B\omega \Rightarrow B = \frac{V}{\omega}$

தீர்வு $X = -\frac{a}{4}\cos\omega t + \frac{V}{\omega}\sin\omega t.$

வகையிட : $\dot{X} = \frac{a\omega}{4}\sin\omega t + V\cos\omega t.$ (5)

$\dot{X} = 0$ ஆக அதிதாழ் புள்ளி L ஐ முதலில் அடையும் : (5)

$t = t_1,$

$\tan\omega t_1 = -\frac{4V}{a\omega}$ (5)

$\omega t_1 = \pi - \alpha$ (5)

$\tan\alpha = \frac{4V}{a\omega}$; இங்கு $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

SHS இன் மையம் $x = \frac{5a}{4}$ அல்லது $C = \frac{a}{4}$ (5)

$\frac{a}{4} = c\cos\alpha = \frac{c(a\omega)}{\sqrt{16V^2 + a^2\omega^2}}$

$= c.\frac{2\sqrt{ga}}{\sqrt{16\times 2ga + 4ga}} = \frac{1}{3}c$ (5) $\Rightarrow c = \frac{3a}{4}$

$\omega t_1 = \pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

$t_1 = \frac{1}{\omega}\left\{\pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right\}.$ (5)

www.ikdu.lk

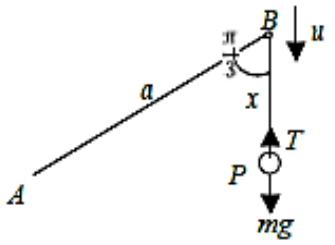
5. இயற்கை நீளம் a யையும் மீள்தன்மை மட்டு $2mg$ யையும் உடைய ஓர் இலேசான மீள்தன்மை இழையின் ஒரு நுனி ஒரு நிலைத்த புள்ளி A யிற் கட்டப்பட்டுள்ளது. A யின் மட்டத்திற்கு மேலே நிலைப்படுத்தப்பட்ட ஒரு சிறிய ஒப்பமான முனை B யிற்கு மேலாக இழை செல்கின்றது. இழையின் மற்றைய நுனியில் திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P இனைக்கப்பட்டுள்ளது. தூரம் AB ஆனது a யும் BA யிற்கும் கீழ்முக நிலைக்குத்திற்குமிடையே உள்ள கோணம; $\frac{\pi}{3}$ உம் ஆகும்.தொடக்கத்தில் துணிக்கை P ஆனது முனை B யிற்குச் சற்றுக் கீழே வைக்கப்பட்டு நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கி கதி $u = \sqrt{\frac{5ga}{8}}$ உடன் எறியப்படுகின்றது. நேரம் t யில் இழையின் நீட்சி x எனக் கொள்வோம்.

துணிக்கை P யின் எளிய இசை இயக்கத்திற்கான சமன்பாடு வடிவம் $\ddot{X} + \omega^2 X = 0$ இல் எடுத்துரைக்கப்படலாமெனக் காட்டுக. இங்கு $X = x - \frac{a}{2}$ உம் $\omega^2 = \frac{2g}{a}$ உம் ஆகும்.

இவ்வியக்கச் சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வை வடிவம் $\dot{X}^2 = \omega^2(A^2 - X^2)$ இல் கருதி எளிய இசை இயக்கத்தின் வீச்சம் $A = \frac{3a}{4}$ எனக் காட்டி துணிக்கை அடைந்த மிகத் தாழ்ந்த புள்ளி E யைக் காண்க. துணிக்கை எளிய இசை இயக்கத்தின் மையம் C யைக் கடந்து செல்லும் போது அதன் கதி $\frac{3u}{\sqrt{5}}$ எனக் காட்டுக.

ஒத்த வட்ட இயக்கத்தைக் கருதுவதன் மூலம் அல்லது வேறுவிதமாக, துணிக்கை P அதன் கீழ்முக இயக்கத்தில் C யைக் கடந்து செல்வதற்கு எடுக்கும் நேரம் $\sqrt{\frac{a}{2g}}\left\{\frac{\pi}{2} - \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right\}$ எனக் காட்டுக.

மேலும் துணிக்கை P அதன் மிகத் தாழ்ந்த தானம் E யை அடைவதற்கு எடுக்கும் நேரத்தையும் இழையினால் முனை மீது உஞற்றப்படும் விசையின் உயர்ந்தபட்சப் பருமனையும் காண்க.



துணிக்கை Pக்கு. $F = ma$ ஐ பிரயோகிக்க

$\downarrow\ mg - T = m\ddot{x}$ (5)

$T = 2mg\left(\frac{x}{a}\right)$, $\because$ மீள்தன்மை மட்டு $= 2mg$ (5)

T ஐ நீக்கி m ஆல் பிரிக்க

$g = \frac{2g}{a}x + \ddot{x} \quad \Rightarrow \ddot{x} + \frac{2g}{a}\left(x - \frac{a}{2}\right) = 0$ (5)

$\ddot{X} + \omega^2 X = 0$, இங்கு $X = x - \frac{a}{2}$, $\omega^2 = \frac{2g}{a}$ (5)

25

$X = 0$ஆக SHM இன் மையம் பெறப்படும் $\Rightarrow x = \frac{a}{2}$ (முளைக்குக் கீழேயான ஆழம்)

SHM சமன்பாட்டின் தீர்வு $\dot{X}^2 = \omega^2(A^2 - X^2)$,

இங்கு A யானது இயக்கத்தின் வீச்சம். (5)

ஆரம்பத்தில், $x = 0$ஆக, $X = -\frac{a}{2}$, $\dot{x} = \dot{X} = \sqrt{\frac{5ga}{8}} = u$. (5)

தரப்பட்ட தீர்வில் பிரதியிட

$\frac{5ga}{8} = \frac{2g}{a}\left[A^2 - \left(-\frac{a}{2}\right)^2\right]$ (5)

$\frac{5a^2}{16} + \frac{a^2}{4} = A^2 = \frac{9a^2}{16}$

A நேராதலால், $A = \frac{3a}{4}$. (5)

MSM. Usama. Bsc
Teacher
Combined Mathematics
Mob. 0772273791

www.ikoj.lk

SHM இன் வீச்சம் $=\frac{3a}{4}$

இழையின் உயர் விரிவு $\Rightarrow \dot{X}=0$ இல் நிகழும் அப்போது , (5)

$X=A \Rightarrow x-\frac{a}{2}=\frac{3a}{4} \Rightarrow x=\frac{5a}{4}$. (5)

$\dot{X}^2=\omega^2\left(A^2-X^2\right)$, இங்கு $A=\frac{3a}{4}$

மையத்தினூடு $(X=0)$செல்லும் பொழுது துணிக்கையின் கதி V எனின்

$V^2=\omega^2A^2=\frac{2g}{a}\cdot\frac{9a^2}{16}\Rightarrow V=3\sqrt{\frac{ga}{8}}$ (5)

(5)

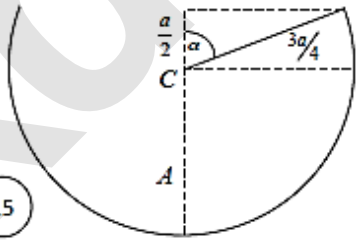
மேலும், $u^2=\frac{5ga}{8}$.

$\therefore \left(\frac{V}{u}\right)^2=\frac{9ga}{8}\cdot\frac{8}{5ga}$ (5)

$\Rightarrow \quad V=\frac{3u}{\sqrt{5}}$ (5)

α கூர்ங்கோணமென்க, $\alpha=\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$. (5)

t_0 ஆனது துணிக்கை B இலிருந்து மையம் Cஐ சுடக்க எடுக்கும் நேரம் ஆயின்



$\omega t_0=\frac{\pi}{2}-\alpha \Rightarrow t_0=\frac{1}{\omega}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ (5)

(5)

i.e. $t_0=\sqrt{\frac{a}{2g}}\left\{\frac{\pi}{2}-\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right\}$ (5)

15

35

t_1 ஆனது துணிக்கை அதிதாழ் நிலையை அடைய எடுக்கும் நேரம் ஆயின்

$\omega t_1=\pi-\alpha \Rightarrow t_1=\frac{1}{\omega}(\pi-\alpha)$ (5)

i.e. $t_1=\sqrt{\frac{a}{2g}}\left\{\pi-\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right\}$ (5)

15

t_1 ஆனது துணிக்கை அதிதாழ் நிலையை அடைய எடுக்கும் நேரம் ஆயின்

(5)

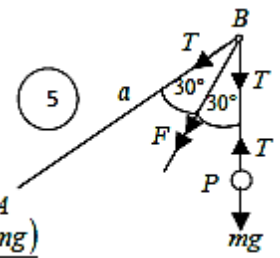
$\omega t_1=\pi-\alpha \Rightarrow t_1=\frac{1}{\omega}(\pi-\alpha)$ (5)

i.e. $t_1=\sqrt{\frac{a}{2g}}\left\{\pi-\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right\}$ (5)

15

உயர் விரிவு $=\frac{5a}{4}$.

(5)



உயர் இழுவை $T_{\max}=(2mg)\left(\frac{5a/4}{a}\right)=\frac{5mg}{2}$ (5)

(5)

முளையின் மீதான விசையின் உயர் பருமன் $=2T_{\max}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=T_{\max}\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{(5mg)}{2}$.

www.ikdu.lk

Aliter தீர்வின் வடிவம் $X = x - \frac{a}{2} = \alpha cos\omega t + \beta sin\omega t, \ldots\ldots\ldots (i)$

இங்கு $\omega^2 = \frac{2g}{a}$

வகையிட $\dot{X} = \dot{x} = -\alpha\omega sin\omega t + \beta\omega cos\omega t, \ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$ (5)

ஆரம்ப நிபந்தனைகள் மூலம் α, β மாறிலிகள் கொடுக்கப்படுகின்றன.

t=0 ஆகும் பொழுது $x = 0, \dot{x} = u = \sqrt{\frac{5ga}{8}}$ (5)

$\Rightarrow -\frac{a}{2} = \alpha, u = \beta\omega, ie\beta = \frac{u}{\omega}$ (5)

(5)

(i),(ii) இல் பிரதியிட $\Rightarrow x = \frac{a}{2}(1 - \cos\omega t) + \frac{u}{\omega}\sin\omega t,$ (5)

$\dot{x} = \frac{\alpha\omega}{2} sin\omega t + ucos\omega t$ (5)

$X = 0; \Rightarrow x = \frac{a}{2}$ ஆக SHM இன் மையம் C பெறப்படும

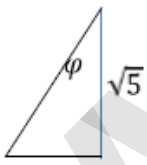
துணிக்கை t_0 நேரத்தில் கடப்பின் $0 = -\frac{a}{2}cos\omega t_0 + \frac{u}{\omega}sin\omega t_0$ (5)

25

$ie.\ tan\omega t_0 = \frac{a\omega}{2u} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ (5) $\because \left(\frac{a\omega}{2u}\right)^2 = \frac{2ag}{5ag/2}$ (5)

φ கூர்ங்கோணம் எனின் $\varphi = tan^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{\pi}{2} - cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ (5)

இதிலிருந்து தேவையான நேரம் $t_0 = \sqrt{\frac{a}{2g}}\left\{\frac{\pi}{2} - cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right\}$



C ஐ கடக்கும் போது துணிக்கையின் கதி V எனின்

$\therefore V = \frac{a\omega}{2}sin\omega t_0 + ucos\omega t_0 = u[tan\omega t_0 . sin\omega t_0 + cos\omega t_0]$

(5) (5)

$= u\ sec\omega t_0 = \frac{3u}{\sqrt{5}}$

முளை B யிலிருந்து அதிதாழ் புள்ளி E க்கு வர எடுத்த நேரம் $t_1 = t_{B\to C} + t_{C\to E}$

$t_1 = t_0 + \frac{1}{\omega}.\frac{\pi}{2}$ $t_1 = \sqrt{\frac{a}{2g}}\left\{\pi - cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right\}$ (5)

$t = t_1$ ஆகும் போது உயர் நீட்சி x_1 பெறப்படுகிறது எனின்

$x_1 = \frac{a}{2}(1 - cos\omega t_1) + \frac{u}{\omega}sin\omega t_1 = \frac{a}{2}\left(1 + \frac{2}{3}\right) + \frac{a\sqrt{5}}{4}.\frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{5a}{4}.$

(5) (5) (5)

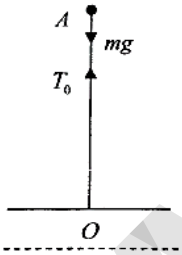
SHM இன் வீச்சம் $= \frac{5a}{4} - \frac{a}{2} = \frac{3a}{4}$ (5)

www.lkdu.lk

6. இயற்கை நீளம் $4a$ யையும் மீள்தன்மை மட்டு $8mg$ ஐயும் உடைய ஒரு மெல்லிய இலேசான மீள்தன்மை வில் அதன் தாழ்ந்த நுனி O நிலைப்படுத்தப்பட்டிருக்க நிலைக்குத்தாக நிற்கின்றது. திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P அதன் மேல் நுனியுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. துணிக்கை P ஆனது O இற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே உள்ள ஒரு புள்ளி A யிலே நாப்பத்தில் உள்ளது. $OA = \frac{7a}{2}$ எனக் காட்டுக.

இப்போது அதே திணிவு m ஐ உடைய வேறொரு துணிக்கை Q ஆனது P உடன் மெதுவாக இணைக்கப்பட்டு சேர்த்தித் துணிக்கை A யிலே ஓய்விலிருந்து இயங்கத்தொடங்குகின்றது. சேர்த்தித் துணிக்கையின் இயக்கச் சமன்பாடு $\ddot{x} = -\frac{8}{a}x$ எனக் காட்டுக. இங்கு $OB = 3a$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக O இற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே உள்ள புள்ளி B யிலிருந்து சேர்த்தித் துணிக்கையின் இடப்பெயர்ச்சி x ஆகும்.
சேர்த்தித் துணிக்கையினால் அடையப்பட்ட மிகவும் தாழ்ந்த புள்ளி C எனக் கொள்வோம். நீளம் OC யையும் A யிலிருந்து C யிற்கு இயங்குவதற்குச் சேர்த்தித் துணிக்கை எடுத்த நேரத்தையம் காண்க.
சேர்த்தித் துணிக்கை C யில் இருக்கும் கணத்தில் துணிக்கை Q மெதுவாக அகற்றப்படுகின்றது. பின்னர் நிகழும் துணிக்கை P யின் இயக்கத்திற்கு இயக்க சமன்பாடு $\ddot{y} = -\frac{2g}{a}y$ எனக் காட்டுக. இங்கு y ஆனது புள்ளி A யிலிருந்து துணிக்கை P யின் இடப்பெயர்ச்சியாகும்.
இச்சமன்பாட்டிற்கு வடிவம் $y = \alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t$ யில் ஒரு தீர்வைக் கருதிக் கொண்டு α, β, ω ஆகிய மாறிலிகளின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

இதிலிருந்து C யிலிருந்து D யிற்கு இயங்குவதற்கு துணிக்கை P எடுத்த நேரம் $\frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{2a}{g}}$ எனக் காட்டுக. இங்கு D ஆனது $OD = 4a$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக O யிற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே உள்ள புள்ளியாகும். அத்துடன் D யை அடையும் போது துணிக்கை P யின் கதியையும் காண்க.



சமநிலைக்கு $T_0 = mg$ (5)

$T_0 = \frac{8mg}{4a}(4a - OA)$ (5)

$\frac{8mg}{4a}(4a - OA) = mg$

(5) $8a - 2(OA) = a \Rightarrow OA = \frac{7a}{2}$

15

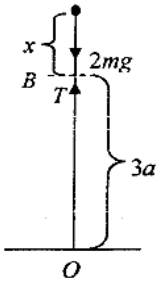
சேர்ந்த துணிக்கையின் இயக்கத்திற்கு

$\vec{F} = m\vec{a}$ (10)

$T - 2mg = 2m\ddot{x}$

$\frac{8mg}{4a}(a - x) - 2mg = 2m\ddot{x}$ (5)

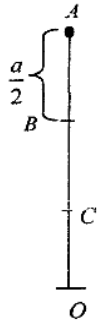
$\Rightarrow \ddot{x} = -\frac{g}{a}x$ (5)



20

C ஐ கடக்கும் போது துணிகையின் கதி V எனின்

$V = \frac{a\omega}{2}\sin\omega t_0 + u\cos\omega t_0 = u[\tan\omega t_0 . \sin\omega t_0 + \cos\omega t_0]$



இந்த எளிய இசை இயக்கத்தின் அலைவு மையம் B , OB = 3a .

$\therefore$ வீச்சம் $= AB = \frac{a}{2}$, அலைவுகாலம் $= \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{a}}}$ (5) (5)

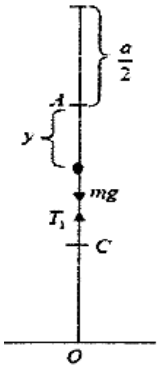
எனின், $BC = \frac{a}{2}$ (5) $OC = OB - BC = 3a$ $\frac{a}{2} = \frac{5a}{2}$ (5)

A இல் இருந்து C க்கான இயக்கத்துக்கு எடுத்தநேரம்

$= \frac{1}{2} \times$ அலைவுகாலம் $= \pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ (5)

(5)

30



துணிக்கை P க்கு $\uparrow \quad \underline{F} = m\underline{a}$

$-T_1 + mg = m\ddot{y}$ (10)

$-\frac{8mg}{4a}\left(y + \frac{a}{2}\right) + mg = m\ddot{y}$ (5)

சுருக்கலுக்கு - (5)

$\ddot{y} = -\frac{2g}{a}y$ ..... (i) **20**

$y = \alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t$ ..... (ii) (5)

$\dot{y} = -\alpha\omega\sin\omega t + \beta\omega\cos\omega t$

$\ddot{y} = -\omega^2(\alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t)$ (5)

$= -\omega^2 y$ (5)

Comparing with (i) $\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2g}{a}}$ (5)

$t = 0$ இல் துணிக்கை Pஆனது C இல் உள்ளது என்க.

$\therefore t = 0$ இல், $y = AC = a$ (5)

$t = 0$ இல், $\dot{y} = 0$ ஆகும். (5)

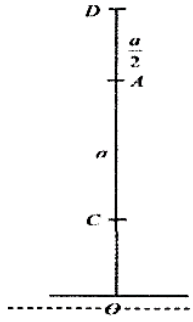
(ii) $\Rightarrow a = \alpha$ (5)

$0 = \beta\omega$

$\Rightarrow \beta = 0$ (5)

$\therefore \quad y = a\cos\omega t$

துணிக்கை C இல் இருந்து D இற்கு செல்ல எடுத்த நேரம் t_1 என்க.



எனின், $t = t_1$ இல் $y = -a/2$

$-\frac{a}{2} = a\cos\omega t_1$ (5)

$\omega t_1 = \frac{2\pi}{3}$ (5)

$\therefore t_1 = \frac{2\pi}{3}\cdot\sqrt{\frac{a}{2g}} = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{2a}{g}}$ (5)

15

$\dot{y} = -a\omega\sin\omega t_1 = -a\sqrt{\frac{2g}{a}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{\frac{3ga}{2}}$ (5)

($t = t_1$ இல் துணிக்கை D இல்) $\therefore D$ இல்துணிக்கையின் கதி $= \sqrt{\frac{3ga}{2}}$ (5) **10**

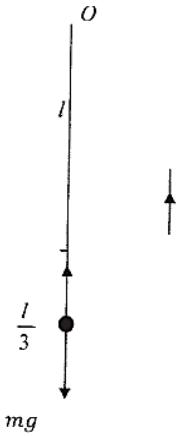
7. திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை இயற்கை நீளம் l ஐ உடைய ஓர் இலேசான மீள்தன்மை இழையின் ஒரு நுனியுடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கும் அதேவேளை இழையின் மற்றைய நுனி ஒரு நிலைத்த புள்ளி O உடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. துணிக்கை நாப்பத்தில் தொங்கும் போது இழையின் நீட்சி $\frac{l}{3}$ ஆகும். இழையின் மீள்தன்மை மட்டைக் காண்க. துணிக்கை O விற்கு நிலைக்குத்தாக கீழே தூரம் $\frac{l}{2}$ இல் உள்ள புள்ளியில் வைக்கப்பட்டு ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றது. துணிக்கை O இற்கு நிலைக்குத்தாகக் கீழே தூரம் l இல் உள்ள புள்ளி A யை முதல் தடவை அடையும் போது அதன் வேகத்தைக் காண்க.
B என்பது துணிக்கை அடையும் மிகவும் தாழ்ந்த புள்ளி எனக் கொள்வோம். A யிலிருந்து B யிற்கான துணிக்கையின் இயக்கத்திற்கு இழையின் நீட்சி x ஆனது சமன்பாடு $\ddot{x} + \frac{3g}{l}\left(x - \frac{1}{3}\right) = 0$ ஐத் திருப்பதியாக்குமெனக் காட்டுக.
மேற்குறித்த சமன்பாட்டின் தீர்வின் வடிவம் $x = \frac{l}{3} + \alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t$ எனக்கொண்டு α, β, ω ஆகிய மாறிலிகளின் பெறுமானங்களைக் காண்க.
இதிலிருந்து A தொடக்கம் B வரைக்கும் துணிக்கை ஆற்றிய எளிய இசை இயக்கத்தின் மையத்தையும் வீச்சத்தையும் காண்க.

துணிக்கை விடுவிக்கப்படும் கணத்திலிருந்து நேரம் $\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{1 + \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\right\}$ இற்குப் பின்னர் புள்ளி B யை அடைகின்றதெனக் காட்டுக.

MSM. Usama. Bsc
Teacher
Combined Mathematics
Mob. 0772273791

www.ikou.lk

மீள்தன்மைக் குணகம் λ என்க.



$$T_0 = \frac{\lambda\left(\frac{l}{3}\right)}{l} \quad (5)$$

$$T_0 = mg$$

$$\frac{\lambda l}{3l} = mg$$

$$\lambda = 3mg \quad (5)$$

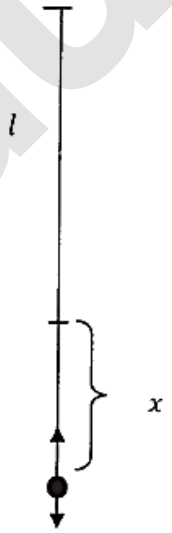
$$v^2 = u^2 + 2as$$

$$v^2 = 2g\left(\frac{l}{2}\right)$$

$$v = \sqrt{gl} \quad (5)$$

MSM. Usama. Bsc
Teacher
Combined Mathematics
Mob. 0772273791

$$T = \frac{\lambda x}{l} = \frac{3mgx}{l} \quad (5)$$



$F = ma \downarrow$ $\quad mg - T = m\ddot{x}$ (10)

$$mg - \frac{3mgx}{l} = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{3g\left(x-\frac{l}{3}\right)}{l} = 0\,; \quad x \geq 0 \quad (5)$$

$$x = \frac{l}{3} + \alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t$$

$x = 0$ $t = 0$; ஆகும்போது (5)

$$0 = \frac{l}{3} + \alpha \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{-l}{3} \quad (5)$$

$$\dot{x} = -\alpha\omega\sin\omega t + \beta\omega\cos\omega t \quad (5)$$

$t = 0$; ஆகும்போது $\dot{x} = \sqrt{gl}$ ஆகும்

$$\sqrt{gl} = \beta\omega \quad (5)$$

$$\ddot{x} = -\alpha\omega^2\cos\omega t - \beta\omega^2\sin\omega t \quad (5)$$

$$\frac{-3g\left(x-\frac{l}{3}\right)}{l} = -\alpha\omega^2\cos\omega t - \beta\omega^2\sin\omega t \quad (5)$$

$x = \frac{l}{3} + \alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t$ என்பதனால்

$$x - \frac{l}{3} = \alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t \quad (5)$$

$x - \frac{l}{3} = 0$ ஆக அலைவு மையம் பெறப்படும் (5)

$$\therefore \; x = \frac{l}{3}$$

எனவே அலைவு மையம் C யிற்குக் கீழ் A இலிருந்து $\frac{l}{3}$ ஆழத்தில் இருக்கும்.

10

விச்சம் $= BC$

$t = t_1$ இல் $x = 0$ இற்கான தீர்ப்பின் $-\alpha\omega \sin\omega t_1 + \beta\omega \cos\omega t_1 = 0$ (5)

(5)

$$\Rightarrow \frac{l}{3} \sin\omega t_1 = -\frac{l}{\sqrt{3}} \cos\omega t_1$$

$$\tan \omega t_1 = -\sqrt{3}$$

$$\omega t_1 = \frac{2\pi}{3} \quad (5)$$

$t = t_1$ ஆக x காணல்

$$x = \frac{l}{3} - \frac{l}{3} \cos\omega t_1 + \frac{l}{\sqrt{3}} \sin\omega t_1 \quad (5)$$

$$= \frac{l}{3} - \frac{l}{3} \cos \frac{2\pi}{3} + \frac{l}{\sqrt{3}} \sin \frac{2\pi}{3}$$

$$= \frac{l}{3} + \frac{l}{6} + \frac{l}{2}$$

$$= l \quad (5)$$

$$\therefore BC = l - \frac{l}{3} = \frac{2l}{3} \quad (5)$$

30

முதலில் A ஐ அடைவதற்கு எடுக்கும் நேரம் t_o என்க.

$S = ut + \frac{1}{2} at^2$ ↓ ஐப் பிரயோகிக்க.

$$u = 0,\ a = g,\ s = \frac{l}{2},\ t = t_o$$

$$\frac{l}{2} = \frac{1}{2} g t_o^2 \quad (5)$$

$$t_o = \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (5)$$

B ஐ அடைவதற்கு எடுக்கும் மொத்த நேரம் $= \sqrt{\frac{l}{g}} + \frac{2\pi}{3\omega}$ (5)

$$= \sqrt{\frac{l}{g}} + \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{l}{3g}}$$

$$= \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\right) \quad (5)$$

20

துணிக்கை B யில் இருக்கும்போது இழுவை $= \frac{3mg}{l} (AB)$ (5)

$$= \frac{3mg}{l} (l)$$

$$= 3mg \quad (5)$$

10

MSM. Usama. Bsc
Teacher
Combined Mathematics
Mob. 0772273791

www.ikdu.lk

8. A, B என்பன ஓர் ஒப்பமான கிடை மேசை மீது இடைத்தூரம் $8l$ இல் இருக்கும் இரு புள்ளிகளாகும். திணிவு m ஐ உடைய ஓர் ஒப்பமான துணிக்கை P ஆனது A யிற்கும் B யிற்குமிடையே AB மீது உள்ள ஒரு புள்ளியில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. இயற்கை நீளம் $3\,l$ ஐயும் மீள்தன்மை மட்டு 4λ வையும் உடைய ஓர் இலேசான மீள்தன்மை இழையினால் புள்ளி A உடனும் இயற்கை நீளம் $2\,l$ ஐயும் மீள்தன்மை மட்டு λ வையும் உடைய ஓர் இலேசான மீள்தன்மை இழையினால் புள்ளி B உடனும் துணிக்கை P இணைக்கப்பட்டுள்ளது.

துணிக்கை P ஆனது ஒரு புள்ளி C யிலே நாப்பத்தில் இருக்குமெனின் $AC = \frac{42}{11}l$ எனக் காட்டுக.

துணிக்கை P ஆனது AB யின் நடுப்புள்ளி M இல் வைக்கப்பட்டு பின்னர் ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றது. துணிக்கை P ஆனது AB வழியே புள்ளி A யிலிருந்து தூரம் x இல் இருக்கும் போது இரு இழைகளினதும் இழுவைகளைப் பெறுக.

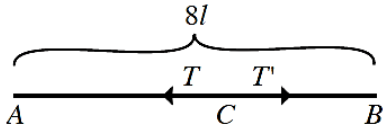
$\frac{40}{11}l \le x \le 4l$ இற்குத் துணிக்கை P யின் இயக்கச் சமன்பாட்டை எழுதி வழக்கமான குறிப்பீட்டில் $\ddot{x} + \frac{11\lambda}{6ml}\left(x - \frac{42}{11}l\right) = 0$ எனக் காட்டுக.

$y = x - \frac{42}{11}l$ என எழுதுவதன் மூலம் $\ddot{y} + \frac{11\lambda}{6ml}y = 0$ எனக் காட்டுக.

மேற்குறித்த சமன்பாட்டின் தீர்வு வடிவம் $y = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ யை உடையதெனக் கொண்டு A, B, ω ஆகிய மாறிலிகளைக் காண்க.

துணிக்கை P ஆனது புள்ளி A யிலிருந்து தூரம் $\frac{41}{11}l$ இல் இருக்கும்போது அதன் வேகத்தைக் காண்க.

துணிக்கை P, C இல் இருக்கும் போது AP இழையில் இழுவை T என்க.
துணிக்கை P, C இல் இருக்கும் போது PB இழையில் இழுவை T' என்க.



(05)

$$T = \left(\frac{AC - 3l}{3l}\right)4\lambda \quad , \quad T' = \left(\frac{8l - AC - 2l}{2l}\right)\lambda = \left(\frac{6l - AC}{2l}\right)\lambda .$$

(10) **(10)**

துணிக்கை P ஆனது புள்ளி C இல் நாப்பத்தில் இருக்குமெனின்,

$$T = T' \Rightarrow \left(\frac{AC - 3l}{3l}\right)4\lambda = \left(\frac{6l - AC}{2l}\right)\lambda \Rightarrow 11AC = 42l \Rightarrow AC = \frac{42}{11}l .$$

(05) **(05)** **(05)** **[40]**

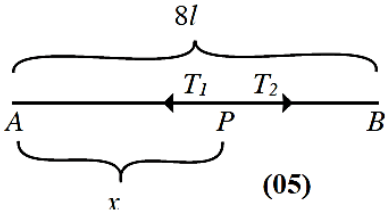
துணிக்கை P ஆனது A எனும் புள்ளியிலிருந்து x தூரத்தில் உள்ள போது AP இல் உள்ள இழுவையை T_1 என்க.

துணிக்கை P ஆனது A எனும் புள்ளியிலிருந்து x தூரத்தில் உள்ள போது BP இல் உள்ள இழுவையை T_2 என்க.

ஊக்கின் விதியினால்

$$T_1 = \left(\frac{x - 3l}{3l}\right)4\lambda \quad \textbf{(05)}$$

$$T_2 = \left(\frac{8l - x - 2l}{2l}\right)\lambda = \left(\frac{6l - x}{2l}\right)\lambda \quad \textbf{(05)}$$



(05)

துணிக்கை P இற்கு AB வழியே நியூட்டனின் விதியை பிரயோகிக்க.

$$T_2 - T_1 = m\ddot{x} \quad \textbf{(10)}$$

$$i.e., \left(\frac{6l-x}{2l}\right)\lambda - \left(\frac{x-3l}{3l}\right)4\lambda = m\ddot{x} \quad \textbf{(05)}$$

$$i.e., m\ddot{x} + \frac{\lambda}{l}\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\right)x - 7\lambda = 0 \quad \textbf{(05)}$$

$$i.e., \ddot{x} + \frac{11\lambda}{6ml}x - \frac{7\lambda}{m} = 0$$

$$i.e., \ddot{x} + \frac{11\lambda}{6ml}\left(x - \frac{42}{11}l\right) = 0 \quad \textbf{(05)}$$

$y = x - \frac{42}{11}l$ என்க.

$\dot{y} = \dot{x}$, $\ddot{y} = \ddot{x}$ **(05)**

$$\ddot{y} + \frac{11\lambda}{6ml}y = 0 \to (1) \quad \textbf{(05)}$$

MSM. Usama. Bsc
Teacher
Combined Mathematics
Mob. 0772273791

$y = A\cos\varpi t + B\sin\varpi t \to (2)$.

$\dot{y} = -A\varpi\sin\varpi t + B\varpi\cos\varpi t \to (3)$.

$x = 4l$, $\dot{x} = 0$ at $t = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{11}l$, $\dot{y} = 0$ $t = 0$ இல் **(05)**

எனவே $(2) \Rightarrow A = \frac{2}{11}l$, $(3) \Rightarrow B = 0$.

(05) **(05)**

$$\therefore y = \frac{2}{11}l\cos\varpi t \Rightarrow \ddot{y} = -\frac{2}{11}l\varpi^2\cos\varpi t = -\varpi^2 y.$$

(1) உடன் ஒப்பிட $\varpi^2 = \frac{11\lambda}{6ml} \Rightarrow \varpi = \sqrt{\frac{11\lambda}{6ml}}$. **(05)** **[20]**

$y = \frac{2}{11}l\cos\left(\sqrt{\frac{11\lambda}{6ml}}\right)t$, $-\frac{2}{11}l \le y \le \frac{2}{11}l$ இல் **(05)**

$x = \frac{42}{11}l + \frac{2}{11}l\cos\left(\sqrt{\frac{11\lambda}{6ml}}\right)t$, $\frac{40}{11}l \le x \le 4l$ இல் **(05)**

துணிக்கை P ஆனது $x = \frac{41}{11}l$ எனும் புள்ளியை அடைய எடுக்கும் நேரம் t_0 என்க.

$$\frac{2}{11}\cos\left(\sqrt{\frac{11\lambda}{6ml}}\right)t_0 = \frac{41}{11} - \frac{42}{11} \Rightarrow \cos\left(\sqrt{\frac{11\lambda}{6ml}}\right)t_0 = -\frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow \cos\left(\sqrt{\frac{11\lambda}{6ml}}\right)t_0 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{11\lambda}{6ml}}t_0 = \frac{2\pi}{3} \quad \textbf{(05)}$$

$$\dot{x} = -\frac{2}{11}l\left(\sqrt{\frac{11\lambda}{6ml}}\right)\sin\left(\sqrt{\frac{11\lambda}{6ml}}\right)t \quad \textbf{(05)}$$

இப்புள்ளியில் துணிக்கை P இன் வேகம்

$$\dot{x} = -\frac{2}{11}l\left(\sqrt{\frac{11\lambda}{6ml}}\right)\sin\left(\sqrt{\frac{11\lambda}{6ml}}\right)t_0 = -\frac{2}{11}l\left(\sqrt{\frac{11\lambda}{6ml}}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{\frac{\lambda l}{22m}}$$

(05) **(05)** **[40]**

---

www.ikdu.lk

9. இயற்கை நீளம் l ஐ உடைய ஓர் இலேசான மீள்தன்மை இழையின் ஒரு நுனியுடன் திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இழையின் மற்றைய நுனி ஒரு கிடை நிலத்திலிருந்து உயரம் $4l$ இல் இருக்கும் ஒரு நிலைத்த புள்ளி O உடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. துணிக்கை P நாப்பத்தில் தொங்கும்போது இழையின் நீட்சி l ஆகும். இழையின் மீள்தன்மை மட்டு mg எனக் காட்டுக.

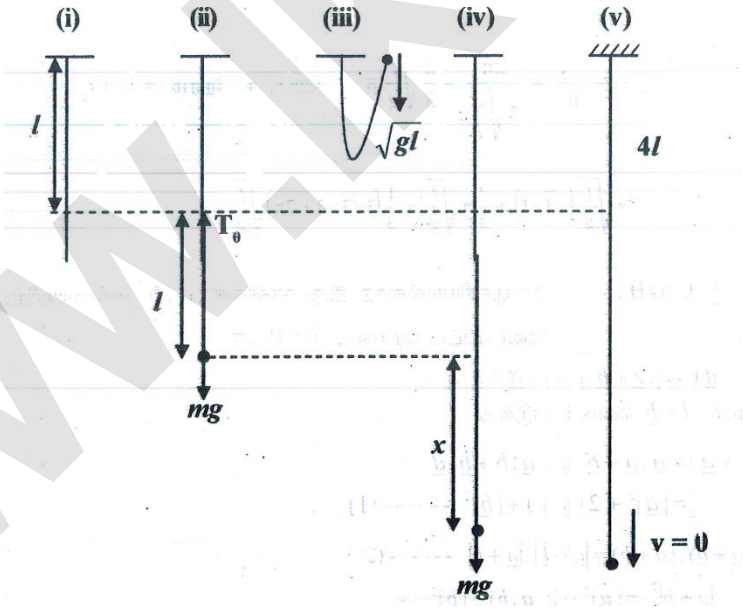
இப்போது துணிக்கை P ஆனது O இல் வைத்திருக்கப்பட்டு வேகம் $\sqrt{gl}$ உடன் நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கி எறியப்படுகின்றது.

துணிக்கை P ஆனது தூரம் l இற்கு விழும்போது அதன் வேகத்தைக் காண்க.

இழையின் நீளம் $2l + x$ ஆக இருக்கும்போது துணிக்கை P யிற்கான இயக்கச் சமன்பாட்டை எழுதி வழக்கமான குறிப்பீட்டில் $\ddot{x} + \frac{g}{l}x = 0$ எனக் காட்டுக. இங்கு $-l \leq x \leq 2l$ ஆகும்.

மேற்குறித்த சமன்பாட்டினால் $c(>0)$ ஒரு மாறிலியாக இருக்கும் $\dot{x}^2 = \frac{g}{l}(c^2 - x^2)$ தரப்படுகின்றதெனக் கொண்டு c யைக் காண்க.

துணிக்கை P ஆனது நிலத்தை அடையும்போது கணநிலை ஓய்வுக்கு வருகின்றது எனவும் O இலிருந்து நிலத்தை அடைவதற்கு எடுக்கும் நேரம் $\frac{1}{3}\left(3\sqrt{3} - 3 + 2\pi\right)\sqrt{\frac{l}{g}}$ எனவும் காட்டுக.



படம் (ii) $T_0 = \frac{\lambda l}{l} mg \rightarrow \lambda = mg$

படம் (iii) $\downarrow V^2 = u^2 + 2as$

$$V^2 = \left(\sqrt{gl}\right)^2 + 2(g)l \Rightarrow v^2 = 3gl \Rightarrow v = \sqrt{3gl}$$

படம் (iv) $F = ma \downarrow \quad mg - T = m\ddot{x}$

$$mg - mg\frac{(l+x)}{l} = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{g}{l}x = 0$$

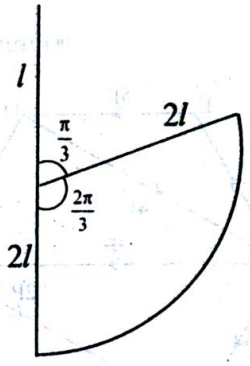
துணிக்கை எ.இ. உடன் இயங்குகிறது.

$$\therefore \dot{x}^2 = w^2(a^2 - x^2)$$

$$\dot{x} = \sqrt{3gl}, \quad x = -l, \qquad \dot{x}^2 = \left(\sqrt{3gl}\right)^2 = \frac{g}{l}(a^2 - (-l)^2)$$

$$3gl = \frac{g}{l}(a^2 - l^2)$$

$$a = 2l \qquad a > 0$$



$$\therefore \quad \dot{x}^2 = \frac{g}{l}((2l)^2 - x^2) = \frac{g}{l}(4l^2 - x^2)$$

$\dot{x} > 0$, for $-l \le x < 2l$ $\quad \dot{x} = 0$, when $x = 2l$

∴ துணிக்கை நிலத்தை அடிக்கும் போது கணநிலை ஓய்விற்கு வரும்.

புவியீர்ப்பின் கீழ் இயங்கும் நேரம் $= t_1$

$v = x + at \downarrow$

$$\sqrt{3gl} = \sqrt{gl} + g\,t_1 \;\Rightarrow\; t_1 = \sqrt{\frac{l}{g}}\left(\sqrt{3} - 1\right)$$

நேரம் t_2 = எ.இ.இ உடன் இயங்கிய நேரம்

$$t_2 = \frac{2\frac{\pi}{3}}{w} = \frac{2\pi}{3\sqrt{\frac{g}{l}}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{l}{g}}\,\pi$$

மொத்த நேரம் $= t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{l}{g}}\left(\sqrt{3} - 1\right) + \frac{2}{3}\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{1}{3}\left(3\sqrt{3} - 3 + 2\pi\right)\sqrt{\frac{l}{g}}$

10. திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P ஆனது இயற்கை நீளம் l ஐ உடைய ஒரு மீள்தன்மை இழையின் ஒரு நுனியுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இழையின் மற்றைய நுனி ஒரு சீலிங்கின் ஒரு நிலைத்த புள்ளி O வுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இழையின் மீள்தன்மை மட்டு λ எனின், துணிக்கை P நாப்பத்தில் தொங்கும்போது இழையின் நீட்சி a ஆனது $a = \frac{mgl}{\lambda}$ இனால் தரப்படுமெனக் காட்டுக.

OP நிலைக்குத்தாகவும் $l + a + b$ யிற்குச் சமமாகவும் இருக்கத்தக்கதாக இழை இப்போது ஒரு மேலதிக நீளம் $b(> a)$ யினால் ஈர்ப்பட்டு, துணிக்கை P ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றது. இழையின் நீளம் $l + a + x$ ஆக இருக்கும் போது இங்கு $-a \le x \le b$, துணிக்கை P யின் இயக்கச் சமன்பாட்டை எழுதி வழக்கமான குறிப்பீட்டில் $\ddot{x} + \frac{g}{a}x = 0$ எனக் காட்டுக.

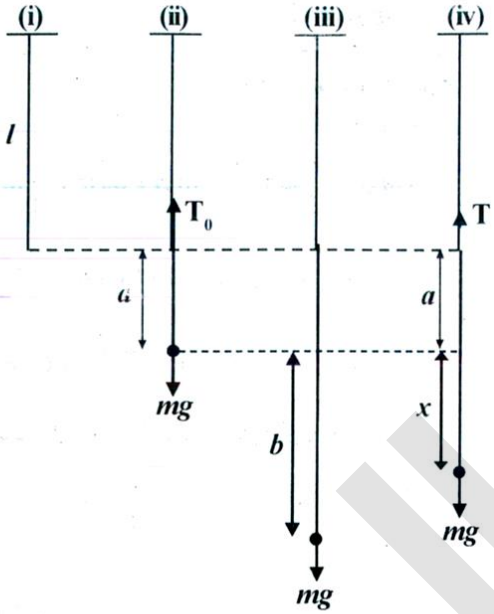
மேற்குறித்த சமன்பாட்டின் தீர்வு $x = A\cos\sqrt{\frac{g}{a}}t + B\sin\sqrt{\frac{g}{a}}t$ என்னும் வடிவத்தில் இருக்கின்றதெனக் கொண்டு A,B ஆகிய மாறிலிகளைக் காண்க.

துணிக்கை P நேரம் $\sqrt{\frac{a}{g}}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ இற்கு எளிய இசை இயக்கத்தை ஆற்றுகின்றது எனவும் இங்கு $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$ எளிய இசை இயக்கத்திலிருந்து விலகும் நேரத்தில் துணிக்கை P யின் வேகம் மேல்நோக்கி $\sqrt{\frac{g}{a}(b^2 - a^2)}$ எனவும் காட்டுக.

அத்துடன் துணிக்கை P பின்னர் புவியீர்ப்பின் கீழ் இயங்கி $b > a\sqrt{1 + \frac{2\lambda}{mg}}$ எனின், சீலிங்கில் பூச்சியமல்லாத வேகத்துடன் அடிக்கும் எனவும் காட்டுக.

www.ikou.lk

சமநிலையில் இழை உள்ள போது இழுவை T_0 என்க. நிலை (ii)



$$T_0 = mg = \frac{\lambda a}{l} \Rightarrow a = \frac{mgl}{\lambda}$$

நிலை (iv) இற்கு $F = ma \downarrow$

$$mg - T = m\ddot{x}$$

$$mg - \lambda\frac{(a+x)}{l} = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} = -\frac{\lambda x}{l}$$

$$m\ddot{x} + \frac{mgl}{a}\frac{x}{e} = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{g}{a}x = 0$$

$$x = A\,Cos\sqrt{\frac{g}{a}}t + B\,Sin\sqrt{\frac{g}{a}}t$$

$$\dot{x} = -A\sqrt{\frac{g}{a}}\,Sin\sqrt{\frac{g}{a}}t + B\sqrt{\frac{g}{a}}\,Cos\sqrt{\frac{g}{a}}t \quad \text{---------- (1)}$$

$t = 0, \quad x = b \quad \Rightarrow \quad b = A \times 1 + B \times 0 \Rightarrow A = b$

$$t = 0, \quad x = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = -A \times 0 + B \times \sqrt{\frac{g}{a}} \times 1 \Rightarrow B = 0$$

$$\therefore \; x = b\;Cos\sqrt{\frac{g}{a}}t$$

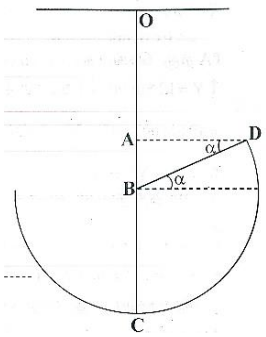
$x = -a$ ஆகும் வரை துணிக்கை எளிய இசை இயக்கத்தை ஆக்கும்.

$$a = b\,Cos\left(\sqrt{\frac{g}{a}}t\right) \Rightarrow Sin\,\alpha = \frac{a}{b}$$

$$Cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -Sin\,\alpha = \frac{-a}{b} \Rightarrow Sin\,\alpha = \frac{a}{b}$$

$\therefore$ துணிக்கை P ஆனது நேரம் $t = \sqrt{\frac{a}{g}}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ இற்கு எளிய இசை இயக்கத்தை ஆற்றுகின்றது. இங்கு $Sin\,\alpha = \frac{a}{b}$ அல்லது $\alpha = Sin^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$

வேறு வழி : எளிய இசை இயக்கத்தை ஆக்கும் பகுதி வட்டவில் CD வரையாகும்.



கோண வேகம் $= \omega = \sqrt{\frac{g}{a}}$

நேரம் $= \frac{\frac{\pi}{2}+\alpha}{\omega} = \frac{\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sqrt{\frac{g}{a}}}$

$= \left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sqrt{\frac{g}{a}}$ இங்கு $Sin\,\alpha = \frac{a}{b}$

www.lkou.lk

$$x = b\,\text{Cos}\sqrt{\frac{g}{a}}\,t \Rightarrow \dot{x} = -b\sqrt{\frac{g}{a}}\,\text{Sin}\sqrt{\frac{g}{a}}\,t$$

$$t = \left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sqrt{\frac{a}{g}} \Rightarrow \dot{x} = -b\sqrt{\frac{g}{a}}\,\text{Sin}\left(\sqrt{\frac{g}{a}}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sqrt{\frac{a}{g}}\right)$$

$$= -b\sqrt{\frac{g}{a}}\,\text{Sin}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -b\sqrt{\frac{g}{a}}\,\text{Cos}\,\alpha = -b\sqrt{\frac{g}{a}}\cdot\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b} = \sqrt{\frac{g}{a}\left(b^2-a^2\right)}$$

$\therefore$ எளிய இசை இயக்கத்திலிருந்து விலகும் நேரத்தில் துணிக்கை P யின் வேகம் மேல் நோக்கி $\sqrt{\frac{g}{a}\left(b^2-a^2\right)}$

துணிக்கையானது A யில் மேல் நோக்கிய நிலைக்குத்துக் வேகத்துடன் புவியீர்ப்பின் கீழ் ஆரம்ப வேகம் $\sqrt{\frac{g}{a}\left(b^2-a^2\right)}$ மேல் நோக்கி இயங்கும்.

$\uparrow v^2 = u^2 + 2as$ ஐ பிரயோகிக்க. $\quad s = l,\ a = -g,\ v = ?$

$$v^2 = \frac{g}{a}\left(b^2-a^2\right)+2(-g)l = \frac{g}{a}\left(b^2-a^2\right)-2\frac{\lambda a}{m}$$

$$= \frac{g}{a}\left[b^2-a^2-\frac{2\lambda a^2}{mg}\right] = \frac{g}{a}\left[b^2-a^2\left(1+\frac{2\lambda}{mg}\right)\right]$$

$b^2 > a^2\left(1+\frac{2\lambda}{mg}\right)$ எனில் $v^2 > 0$

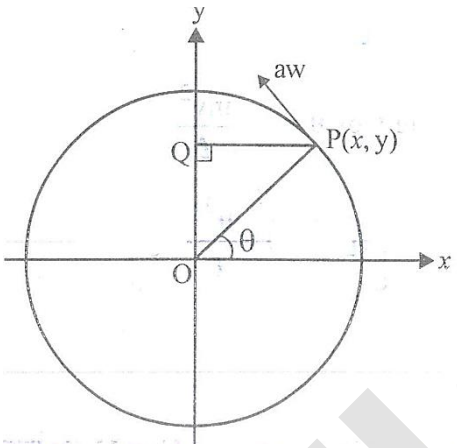
$$\left(b-a\sqrt{1+\frac{2\lambda}{mg}}\right)\left(b+a\sqrt{1+\frac{2\lambda}{mg}}\right) > 0 \Rightarrow b > a\sqrt{1+\frac{2\lambda}{mg}}$$

எனில் P சீலிங்கில் பூச்சியமல்லாத வேகத்துடன் அடிக்கும்.

11. ஒரு துணிக்கை P ஆனது வட்டம் $x^2+y^2=a^2$ மீது சீர்க் கதி $a\omega$ உடன் இயங்குகின்றது. P யிலிருந்து y அச்சு மீது உள்ள செங்குத்தின் அடி Q எனின், Q ஆனது ஆவர்த்தனம் $\frac{2\pi}{\omega}$ உடன் எளிய இசை இயக்கத்தை ஆற்றுகின்றதெனக் காட்டுக.
இயற்கை நீளம் l ஐ உடைய ஓர் இலேசான சுருளி வில் அதன் அச்சு நிலைக்குத்தாக இருக்கக் கீழ் நுனியில் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. வில்லின் மேல் நுனியில் வைக்கப்பட்டுள்ள திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை ஓய்வில் இருக்கும் வில்லை d தூரம் நெருக்கத்தக்கது. இங்கு $d < l$. அதே துணிக்கை ஓர் உயரம் h இலிருந்து வில்லின் மேல் நுனி மீது போடப்படுமெனின், $l \geq a+d$ எனத் தரப்படும்போது துணிக்கை வீச்சம் $a = \sqrt{d^2+2dh}$ உடன் ஓர் எளிய இசை இயக்கத்தை ஆற்றுமெனக் காட்டுக.
இவ்வியக்கத்தில் துணிக்கை குறைந்தபட்சம் நேர ஆயிடை $\frac{3\pi}{2}\sqrt{\frac{d}{g}}$ இற்கேனும் வில்லின் மீது தங்கியிருக்குமெனின், $\left(\frac{h}{d}\right)$ இன் உயர்ந்தபட்சப் பெறுமானத்தைக் காண்க.

சீர்கதி = $a\omega$

$\therefore$ சீர்கோணகதி $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$



கோணம் $POX = \theta \qquad 0 \le \theta < 2\pi$

$y = OQ = OP \cos(90 - \theta) = a \sin\theta$

$\theta = \omega t, \quad y = a \sin \omega t$

$$\frac{dy}{dt} = +a\omega \cos \omega t, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -a\omega \sin \omega t$$

$$\ddot{y} = -\omega^2 y \quad (\because y = a \sin \omega t)$$

$|y| \le a$ புள்ளி Q ஆனது எ.இ.இ. ஆற்றுகின்றது.

P ஆனது ω என்றும் மாறாக் கோணக்கதி உடன் வட்ட இயக்கத்தை ஆக்கும்போது

அலைவு காலம் $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

நிலை (ii) $\quad mg = T_0 = \dfrac{\lambda d}{\ell} \Rightarrow \lambda = \dfrac{mg\ell}{d}$

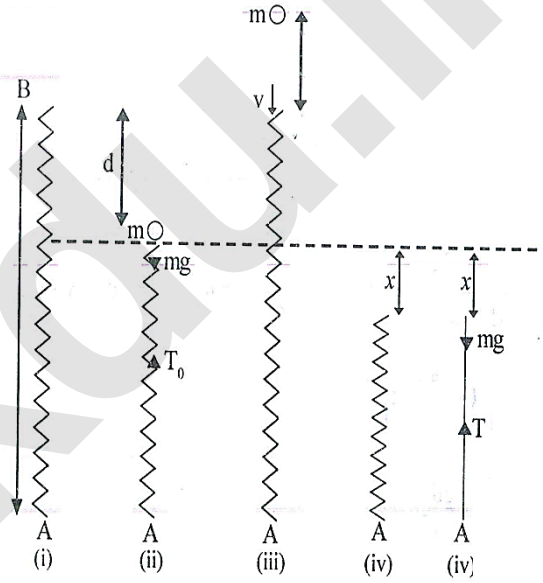
நிலை (iv) $\quad F = ma \downarrow, \quad mg - T = m\ddot{x}$

$$mg - \lambda \frac{(d+x)}{\ell} = m\ddot{x}$$

$$\frac{-\lambda x}{\ell} = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} = -\frac{\lambda}{\ell m} x = -\frac{mg\ell}{d\ell m} x$$

$$\ddot{x} = \frac{g}{d} x$$



இது $\ddot{x} = -w^2 x$ என்னும் வடிவில் இருப்பதால் இயக்கம் SHM இங்கு $w^2 = \dfrac{g}{d}$

முறை II $\quad v^2 = w^2(A^2 - x^2)$

$x = -d$ ஆக, $v^2 = 2gh \Rightarrow 2gh = w^2(A^2 - (-d^2)) = \dfrac{g}{d}\left(A^2 - d^2\right)$

$2ghd = A^2 - d^2, \quad A^2 = 2hd + d^2, \quad A = \sqrt{d^2 + 2hd}$ வீச்சம்

இயக்கத்தின் போது அதிகூடிய ஒரு பெருக்கம் $\le \ell$

$\therefore \quad A + d \le \ell \qquad \sqrt{d^2 + 2hd} + d \le \ell$

முறை II $\quad \ddot{x} = v\dfrac{dv}{dx} \qquad \dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$

$$\ddot{x} = v\frac{dv}{dx} = \frac{-g}{d} x$$

$$vdv = \frac{-g}{d} x dx$$

$$\int vdv = \frac{-g}{d} \int x dx$$

$$\frac{v^2}{2} = \frac{-g}{d}\frac{(x^2)}{2} + k \Rightarrow v^2 = \frac{-g}{d} x^2 + k_1, \quad x = -d \quad v^2 = 2gh$$

$$2gh = \frac{-g}{d}(-d)^2 + k_1$$

$$k_1 = 2gh + \frac{gd^2}{d}$$

$$v^2 = \frac{-g}{d}\lambda^2 + 2gh + gd$$

www.ikou.lk

MSM. Usama. Bsc
Teacher
Combined Mathematics
Mob. 0772273791

V = 0 ஆக $x = x_{max}$, $\quad \frac{g}{d}x^2_{max} = 2gh + gd$

$x^2_{max} = 2hd + d^2$

$x_{max} = \sqrt{d^2 + 2hd}$

வேறு முறை : சக்தி காப்புத தத்துவத்தின்படி

$$\frac{1}{2}m(\dot{x})^2 - mg(x+d) + \frac{1}{2}\frac{\lambda}{2}(x+d)^2 = \text{மாறிலி} \quad \text{----------(1)}$$

x ஐக் குறித்து வகையிடுக.

$$\frac{1}{2}m\ 2(\dot{x})\frac{d\dot{x}}{dx} - mg(1+0) + \frac{1}{2}\frac{\lambda}{\ell}2(x+d) = 0$$

$$m\left(\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx}\right) - mg + \frac{\lambda}{\ell}(x+d) = 0$$

$$\ddot{x} + \left(\frac{g}{d}\right)x = 0$$

இது $\ddot{x} + w^2x$ என்னும் வடிவத்தில் இருப்பதால் இயக்கம் ஓர் SHM ஆகும்.

$\therefore$ இயக்கம் $\frac{2\pi}{w} = 2\pi\sqrt{\frac{g}{d}}$ என்னும் அலைவு காலத்துடன் ஆன ஓர் எ.இ. இயக்கமாகும்.

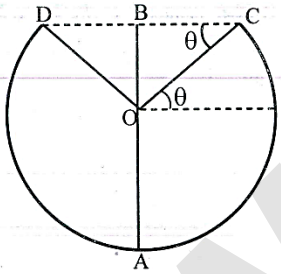
ஆரம்ப நிபந்தனை $x = -d$ ஆகும் போது $\dot{x}^2 = 2gh$

சமன்பாடு (1) இன் மாதிரி mgh ஆகும்.

$$\therefore x^2 = g(2h+d) - \left(\frac{g}{d}\right)x^2$$

வீச்சம $A = x_{max} = \sqrt{d^2 + 2dh}$ இது $\dot{x} = 0$ ஆகும் போது நிகழும்.

அதி உயர் நெருக்கம் $\leq \ell$, $\therefore a + d \leq \ell$



$\angle COA = \frac{\pi}{2} + \theta$

$OA = a = \sqrt{d^2 + 2dh}$

$OB = d$, $BC = \sqrt{2dh}$

$\tan\theta = \sqrt{\frac{d}{2h}}$

துணிக்கை சுருள்வில்லில் இருக்கும் காலம்

$$T = 2\left(\frac{\hat{COA}}{w}\right) = 2\left(\frac{\theta + \frac{\pi}{2}}{w}\right) = \sqrt{\frac{d}{g}}\left[2\tan^{-1}\left[\left(\sqrt{\frac{d}{2h}}\right) + \pi\right]\right]$$

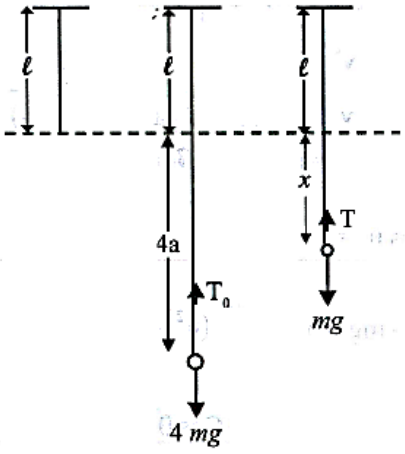
$T \geq \frac{2\pi}{2}\sqrt{\frac{d}{g}}$ ஆகையால் $\sqrt{\left(\frac{d}{2h}\right)} \geq 1 \Rightarrow \frac{h}{d} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{h}{d}\right)_{max} = \frac{1}{2}$

12. இயற்கை நீளம் l ஐ உடைய ஓர் இலேசான மீள்தன்மை இழையின் ஒரு நுனி ஒரு நிலைத்த புள்ளி O வுடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கும் அதே வேளை மற்றைய நுனியில் முறையே $m, 3m$ என்னும் திணிவுகளை உடைய P, Q என்னும் இரு துணிக்கைகள் இழையை $l + 4a$ நீளத்திற்கு ஈர்த்துக் கொண்டு நாப்பத்தில் ஒருமிக்கத் தொங்குகின்றன. துணிக்கை Q சடுதியாக விழுந்து விடுகின்றது. நேரம் t இற்கு பின்னர் இழையின் நீளம் $l + x$ எனின் $x > 0$ இற்குச் சமன்பாடு $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{a}(x - a) = 0$ ஐப் பெறுக.

மேற்குறித்த சமன்பாட்டின் தீர்வு $x = a + b\sin\omega t + c\cos\omega t$ எனத் தரப்பட்டிருப்பின் b, c ஆகிய மாறிலிகளின் பெறுமானங்களைக் காண்க. இங்கு $\omega^2 = \frac{g}{a}$.

துணிக்கை P ஆனது தொடக்கத் தானத்திற்கு மேலே அடையும் உயர்ந்தபட்ச உயரத்தைக் கண்டு அவ்வுயரத்தை அடைவதற்கு எடுக்கும் நேரம் $\sqrt{\frac{a}{g}}\{\pi - \alpha + 2\sqrt{2}\}$ எனக் காட்டுக. இங்கு α ஆனது கூர்ங்கோணம் $\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ ஆகும்.

www.ikdu.lk



$T_0 = 4mg = \lambda\frac{(4a)}{\ell}$

$\lambda = \frac{mg\ell}{a}$

$T = \frac{\lambda x}{\ell} = \left(\frac{mg}{d}\right)\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{mgx}{a}$

$F = ma \downarrow$

$mg - T = m\ddot{x}$

$mg - \frac{mgx}{a} = m\ddot{x}$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{a}(x-a) = 0, \quad x > 0$$

$x = a + b\sin\omega t + c\cos\omega t$ —— (1) $\qquad \omega^2 = \frac{g}{a}$

$\frac{dx}{dt} = b\omega\cos\omega t - c\omega\sin\omega t$ —— (2)

$t = 0, \quad x = 4a$. (1) $\Rightarrow \quad 4a = a + 0 + c \Rightarrow c = 3a$

$t = 0, \quad \frac{dx}{dt} = 0$, (2) $\Rightarrow \quad 0 = b\omega - 0 \Rightarrow b = 0$

$\therefore \quad x = a + 3a\cos\omega t$

இழை தொய்யும் போது $x = 0, \Rightarrow a\cos\omega t = -\frac{a}{3}$

$$\cos\omega t = -\frac{1}{3}$$

எளிமை இசை இயக்கத்திற்கு அமைய இயக்கும் போது t_1 s நேரத்தில் இழை தொய்யுமாயின்

$$t_1 = \frac{\pi - \alpha}{\omega}$$

இங்கு $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ என்னும் கூர்கோணமாகும்.

இழை தொய்ய சற்று முன்னர், P யின் வேகம்

$\frac{dx}{dt} = -c\omega\sin\omega t_1$, இங்கு $\sin\omega t_1 = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$= -3a\sqrt{\frac{g}{a}}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} = -2\sqrt{2ga} = -V$

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{8ga}{2g} = 4a$$

ஆரம்பத்தானத்திலிருந்து, அடைந்த உயர்ந்த பட்ச உயரம் $= 4a + 4a = 8a$

புவியீர்ப்பின் கீழான சுயாதீன இயக்கத்திற்கு

நேரம் $t_2 = \frac{v}{g} = \frac{2\sqrt{2ga}}{g} = 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{a}{g}}$

அதி உயர் உயரத்தை அடைய எடுக்கும் மொத்த நேரம் $= t_1 + t_2$

$t_1 + t_2 = \frac{1}{\omega}(\pi - \alpha) + \frac{1}{\omega}2\sqrt{2}$

$= \frac{1}{\omega}(\pi - \alpha + 2\sqrt{2})$

$= \sqrt{\frac{a}{g}}(\pi - \alpha + 2\sqrt{2})$

www.kdu.lk

Aliter இறுதிப்பகுதி

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{a}(x - a) = 0 \qquad \omega^2 = \frac{g}{a}$$

$X = x - a$ எனின் $\dot{X} = \dot{x}$

$$\dot{X} + \frac{g}{a}X = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 X = 0$$

இச்சமன்பாட்டிற்கான தீர்வு

$\dot{X}^2 = \omega^2 (A^2 - X^2)$ என்னும் வடிவில் இருக்கும்.

$t = o, \quad X = 3a, \quad \dot{X} = 0 \Rightarrow A = 3a$

இது எ.இ.இ. இன் வீச்சு ஆகும்.

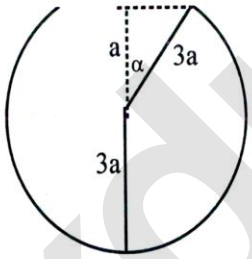
இழை தொய்ய ஆரம்பிக்க $x = 0 \Rightarrow X = -a$

$$\dot{X}^2 = \omega^2 (9a^2 - (-a)^2)$$

$$\dot{X}^2 = \dot{x}^2 = \omega^2 (8a^2)$$

$$\dot{X} = \dot{x} = -\omega 2\sqrt{2}\, a = -v$$

அதி உயர் உயரம் = $8a$



$$t_1 = \frac{1}{\omega}(\pi - \alpha)$$

$$t_2 = \frac{v}{g}$$

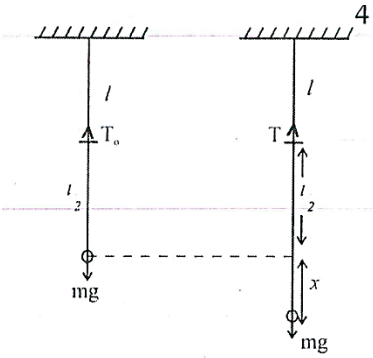
13. இயற்கை நீளம் l உடைய ஓர் இலேசான மீள்தன்மை இழையின் ஒரு நுனி ஒரு நிலைத்த புள்ளி O வில் நிலைப்படுத்தப்பட்டிருக்கும் அதேவேளை இழையின் மற்றைய நுனி திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கையுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. துணிக்கை நாப்பத்தில் தொங்கும் போது இழையின் நீளம் $\frac{3l}{2}$ ஆகும். இழையின் மீள்தன்மை மட்டைக் காண்க.

இப்போது துணிக்கை அதன் நாப்பத் தானத்திலிருந்து தூரம் a யிற்கு நிலைக்குத்தாக கீழ்நோக்கி இழுக்கப்பட்டு அவ்விடத்தில் ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றது. நேரம் t யில் நாப்பத்தானத்திலிருந்து கீழ்நோக்கி அளக்கப்பட்ட துணிக்கையின் இடப்பயெர்ச்சி x ஆகும். இழை இறுக்கமாக இருக்கும் வரைக்கும் $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ எனக் காட்டுக. இங்கு $\omega^2 = \frac{2g}{l}$

I. $a < \frac{l}{2}$ ஆக இருக்கும் சந்தர்ப்பத்தில் நடைபெறும் இயக்கதின் ஆவர்த்தனத்தையும் வீச்சத்தையும் காண்க.

II. $a = \frac{l}{2} + b, (b > 0)$ ஆக இருக்கும் சந்தர்ப்பத்தில் இழை முதலில் தளர்வதற்கு எடுக்கும் நேரம் $\sqrt{\frac{l}{2g}}\left[\pi - \cos^{-1}\left(\frac{l}{l+2b}\right)\right]$ எனக் காட்டுக.

(சமன்பாடு $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ இன் தீர்வு $x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ எனக் கொள்ளலாம். இங்கு A, B ஆகியன துணியப்பட்ட வேண்டிய இரு மாறிலிகளாகும்.)



சமநிலைத் தானத்தில் $T_o = mg = \frac{\lambda \frac{l}{r}}{l} \Rightarrow \lambda = 2mg.$

இயக்கச் சமன்பாடு $\downarrow F = ma$

$mg - T = m\ddot{x}$ $\qquad T = \lambda\left(\frac{l/2 + x}{l}\right)$

$mg - 2mg\left(\frac{l/2 + x}{l}\right) = m\ddot{x}$

$\ddot{x} + \left(\frac{2g}{l}\right)x = 0$

$\frac{d^2x}{dt^2} + w^2x = 0$ இங்கு $w^2 = \frac{2g}{l}$

$x = ACoswt + B\sin wt$

$x = -AwSinwt + BwCoswt$

$t=o,\ x=a \Rightarrow \quad A=a$

$t=o,\ \dot{x}=o \Rightarrow \quad B=o.$

$\therefore x = aCoswt$

(i) வகை (i) $a < l/2$, நீட்சி $= \frac{l}{2} + x = \frac{l}{2} + aCoswt > o$

$T > 0$ எல்லா t யிற்கும்

$\therefore$ அலைவு காலம் $T = \frac{2\pi}{w}$, விச்சம் = a

$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$

(ii) $a = \frac{l}{2} + b,\ (b > 0) \qquad \Rightarrow x = \left(\frac{l}{2} + b\right)Coswt$

இழுவை தளர்வதற்கு $T = 0$

$\frac{l}{2} + \left(\frac{l}{2} + b\right)Coswt = 0$

$wt = Cos^{-1}\left(-\frac{l}{l+2b}\right)$

முதற்தடவை நிகழும் போது $t_1 = \sqrt{\frac{l}{2g}}\left[\pi - Cos^{-1}\left(\frac{l}{l+2b}\right)\right]$

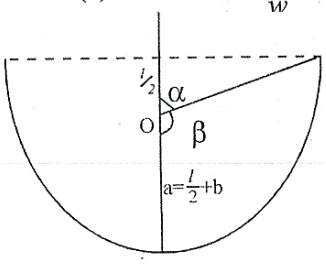
Aliter

வகை (i) $a < l/2$

$\ddot{x} + w^2x = 0 \Rightarrow \qquad T = \frac{2\pi}{w}$

$\ddot{x} + w^2x = 0 \Rightarrow \qquad \dot{x}^2 = w^2(a^2 - x^2) \Rightarrow$ வீச்சம் - a

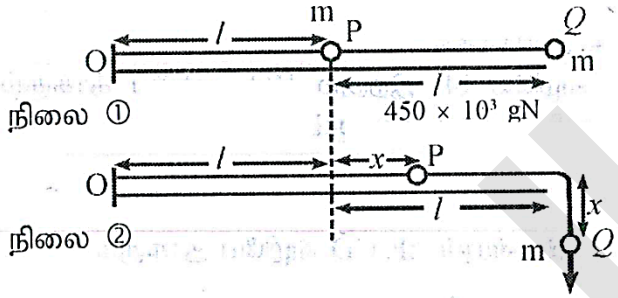
வகை(ii) $t_1 = \frac{\beta}{w} = \frac{\pi - \alpha}{w} = \frac{1}{w}\left[\pi - Cos^{-1}\left(\frac{l/2}{a}\right)\right]$



$\sqrt{\frac{l}{2g}}\left[\pi - Cos^{-1}\left(\frac{l}{l+2b}\right)\right]$

www.lkdu.lk

14. இயற்கை நீளம் l ஐயும் மட்டும் mg யையும் உடைய மீள்தன்மை இழை ஒன்று. ஓர் ஒப்பமான கிடை மேசை மீது அதன் ஒரு விளிம்பிலிருந்து தூரம் $2l$ இல் உள்ள ஒரு நிலைத்த புள்ளி O உடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. திணிவு m ஐ உடைய உடைய ஒரு துணிக்கை P உடன் இழையின் மற்றைய நுனி இணைக்கப்பட்டுள்ளது. நீளம் l ஐ உடைய இலேசான மீள்தன்மையின்றிய இழையொன்று துணிக்கை p ஐ திணிவு m ஐ உடைய ஓர் இரண்டாம் துணிக்கை Q உடன் தொடுக்கின்றது. தொடக்கதிலே $OP = PQ = 1$ ஆக இருக்கும் போது துணிக்கை Q ஆனது மேசையின் விளிம்பிற்கு அண்மையில் வைக்கப்பட்டு அதன் மீது தொகுதி ஓய்விலிருந்து இயங்கத்தொடங்குமாறு மெதுவாகத் தள்ளப்படுகின்றது. நேரம் l யில் $OP = l + x$ ஆகும். அத்தோடு துணிக்கை P ஆனது மேசை மீது தங்கியிருக்கும் அதே வேளை துணிக்கை Q ஆனது மேசையின் மட்டத்துக்குக் கீழே ஆழம் x இல் உள்ளது. பொறி முறை சக்திக் காப்பு கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி அல்லது வேறுவிதமாக,
$\dot{x}^2 = \omega^2[l^2 - (l - x^2)^2]$ எனக்காட்டுக: இங்கு $\omega^2 = \frac{g}{2l}$
p யில் உண்டாகும் எளிய இசை இயக்கத்தின் மையத்தையும் வீச்சத்தையும் காண்க.
கணம் $t = \pi\sqrt{(l/2g)}$ இல் P ஆனது மேசையின் விளிம்பை அடைகின்றதெனக் காட்டி, இக்கணத்தில் அதன் கதியைக் காண்க.



மேசையின் மட்டத்தை பூச்சிய அழுத்த சக்தி மட்டமாகக் கொண்டு
நிலை ① இற்கும் நிலை ② இற்கும் சக்திக் காப்புத் தத்துவத்தை பிரயோகிக்க.

$$\frac{1}{2}\,m\dot{x}^{-2} + \frac{1}{2}\,m\dot{x}^{-2} - mg\,x + \frac{1}{2}\,mg\,\frac{x^2}{l} = O$$

$$\dot{x}^{-2} = \frac{(2xl - x^2)}{2l}\,g$$

$$\dot{x}^{-2} = \frac{g}{2l}\,[-(l^2 - 2xl + x^2) + l^2]$$

$$= \frac{g}{2l}\,[l^2 - (l - x)^2] = \omega^2\,[l^2 - (l - x)^2] \qquad \text{இங்கு } = \omega^2\,\frac{g}{2l}$$

t ஐ குறித்த வகையிட

$$2\,\dot{x}\,\ddot{x} = \omega^2\,[0 - 2\,(l - x)\,\dot{x}\,(-1)]$$

$$\ddot{x} = +\,\omega^2\,(l - x)$$

$l - x = y$ என்க.

$$\ddot{y} = -\,\ddot{x}$$

$$\therefore\ \ddot{y} = -\,\omega^2\,y$$

இது ஓர் எளிமை இசை இயக்கம்

$y = o \Rightarrow l - x = o \Rightarrow x = l$

$x = l$ ஆக அலைவு மையம், மேசையின் ஓரம், வீச்சம் $x = l$

மேசையின் விளிம்பை அடைய எடுக்கும் நேரம் $t = \frac{1}{4}\left(\frac{2\pi}{w}\right) = \frac{\pi}{2w}$

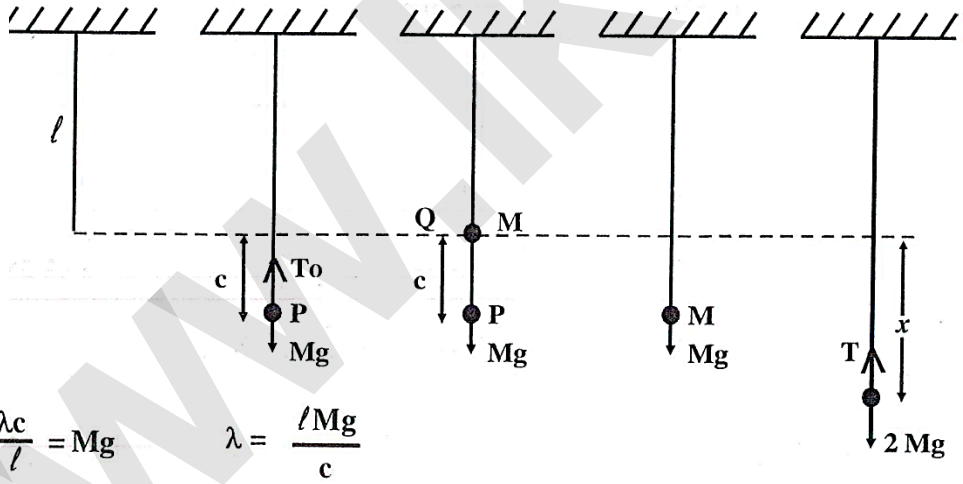
$$= \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2l}{g}} = \pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$$

இக்கணத்தில் P யின் கதி $= wl = \sqrt{\frac{g}{2l}}\, l = \sqrt{\frac{gl}{2}}$

15. இயற்கை நீளம் l ஐக் கொண்ட இலேசான மீள் தன்மை இழையொன்றின் ஒரு நுனி ஒரு நிலைத்த புள்ளியுடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கும் அதே வேளை மற்றைய நுனியில் இருந்து திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P நாப்பத்தில் (சமநிலையில்) தொங்குகின்றது. நிலைக்குத்து நாப்பத் தானத்தில் இழையில் உள்ள நீட்சி c ஆகும். இழையின் மீள் தன்மை மட்டைக் காண்க. துணிக்கை P நாப்பத்திலே ஓய்வில் இருக்கும் போது சம திணிவுள்ள வேறொரு துணிக்கை Q ஆனது P யிற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே ஓர் உயரம் c யில் ஓய்வில் இருந்து விழுந்து P உடன் மோதி இணைகின்றது, மொத்தலுக்கு பின்னர் நேரம் t யில் இழையில் உள்ள நீட்சி x ஆனது சமன்பாடு $\ddot{x} + \omega^2(x - 2c) = 0$ ஐத் திருப்தியாக்குகின்றது எனக்காட்டுக: இங்கு $\omega^2 = \frac{g}{2c}$ ஆகும்.

$x = 2c + a\cos\omega t + b\sin\omega t$ ஆக இருக்குமாறு உள்ள a, b ஆகிய மாறிகளைக்காண்க.

இதிலிருந்து சேர்த்தித் துணிக்கை மொத்தல் நடைபெற்று நேரம் $\frac{3\pi}{4}\sqrt{\frac{2c}{g}}$ இற்கு பின்னர் கணநிலை ஓய்வுக்கு வருகின்றதெனக் காட்டி, இக்கணத்தில் இழையில் உள்ள நீட்சியை காண்க.



$\mathbf{To = \frac{\lambda c}{l} = Mg}$ $\mathbf{\lambda = \frac{lMg}{c}}$

P ஐ அடிக்க சற்றுமுன் Q வின் வேகம் ↓ $V^2 = U^2 + 2aS$

$U^2 = O + 2gc$

$U = \sqrt{2g\,C}$ $U > 0$

உந்தக்காப்பு விதிப்படி ↓ $M \times 0 + M \times \sqrt{2gC} = 2MV$

$$V = \sqrt{2gc/2} = \sqrt{gc/2}$$

கூட்டுப் பொருளின் இலக்கத்திற்கு $F = Ma$ ↓

$2Mg - T = 2M\ddot{x}$ $2Mg - \lambda\frac{x}{l} = 2M\ddot{x}$

$2mg - \frac{Mgl}{c}\left(\frac{x}{l}\right) = 2m\ddot{x}$ $\ddot{x} + \frac{g}{2c}x - g = 0$

$\ddot{x} + \frac{g}{2c}(x - 2c) = 0$

இது $\ddot{x} + \omega^2 (x - 2c) = \omega$ என்னும் வடிவில் உள்ளது $\omega^2 = g / 2c$

$x = 2c + a \cos wt + b \sin wt$ _____ (1)

$\dot{x} = 0 - aw \sin wt + bw \cos wt$ _____ (2)

$\ddot{x} = -aw^2 \cos wt - bw^2 \sin wt$ _____ (3)

$t = 0, x = c \Rightarrow (1) \Rightarrow c = 2c + a \times 1 + b \times c \Rightarrow a = -c$

$t = 0, \dot{x} = \sqrt{gc / 2} \Rightarrow (2) \Rightarrow \sqrt{gc / 2} = 0 + bw \times 1 \Rightarrow b = 1/w\sqrt{gc / 2}$

$= \sqrt{2c / g} \quad \sqrt{gc / 2}$

$= c.$

$\therefore x = 2c - c \cos wt + c \sin wt$

$\dot{x} = o + cw \sin wt + cw \cos wt = cw (\sin wt + \cos wt)$

கூட்டுப்பொருள் கணப்பொழுது ஓய்விற்கு வரும் நிலை

$\dot{x} = 0, \Rightarrow \sin wt + \cos wt = 0$

$\tan wt = -1 = \tan 3\pi / 4$

$wt = 3\pi / 4$

$t = 3\pi / 4 \, w = 3\pi / 4 \sqrt{2c / g} = 3\pi / 4 \sqrt{2c / g}$

இக்கணத்தில் நீட்சி $= x = 2c - c \cos w (3\pi / 4w) + c \sin w (3\pi / 4w)$

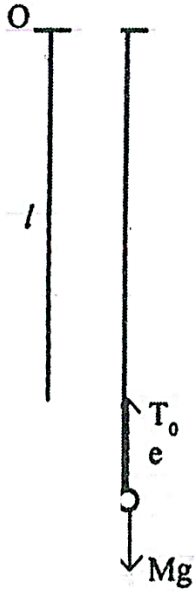
$= 2c - c (-1 / \sqrt{2}) + c (1 / \sqrt{2})$

$= 2c + 2c / \sqrt{2} = c (2 + \sqrt{2})$

16. திணிவு m ஐ உடைய ஒரு சிறிய ஒப்பமான வளையத்தினூடாகச் செல்லும் இயற்கை நீளம் l ஐ உடைய இலேசான மீள் தன்மை இழையொன்றின் நுனியொன்று பாவுகையிலே (சீலிங்கிலே) ஒரு புள்ளி O உடன் தொடுக்கப்பட்டுள்ளது. வளையம் புள்ளி O விலே ஓய்வில் வைத்திருக்கப்படும் போது இழையின் மற்றைய நுனியுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ள திணிவு M ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P நாப்பத்தில் (சமநிலையில்) தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. இழையின் மீள்தன்மை மட்டு $2Mg$ எனின், நாப்பத் தானத்தில் இழையின் நீட்சி $\frac{l}{2}$ எனக் காட்டுக.

இப்போது O விலே ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படும் வளையம் இழை வழியே ஈர்ப்பின் கிழ் நிலைக்குத்தாகக் கீழ்முகமாய் வழுக்கி P உடன் மோதி ஒன்றிணைகின்றது. வளையத்தையும் துணிக்கையையும் கொண்ட சேர்த்திப் பொருள் வேகம் $\frac{m}{M+m}\sqrt{3gl}$ உடன் நிலைக்குத்தாகக் கீழ்முகமாய் இயங்கத் தொடங்குமெனக் காட்டுக.

இழையின் நீட்சி x ஆக இருக்கும் போது சேர்த்திப் பொருளுக்கான இயக்கச் சமன்பாட்டினை எழுதி, சேர்த்திப்பொருள் மீடிறன் $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2Mg}{(M+m)l}}$ உடன் எளிய இசை இயக்கத்தை ஆற்றுகின்றதெனக் காட்டுக.



இழையில் உள்ள இழுவை $T = \frac{\lambda e}{L}$

$$T_0 = \frac{\lambda e}{L} = \frac{2Mge}{e} = Mg$$

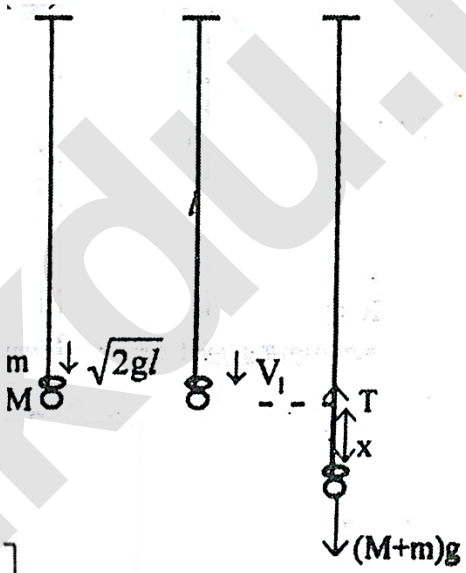
$$e = \frac{l}{2}$$

$$V^2 = u^2 + 2as \downarrow$$

$$V^2 = 0 + 2g\left(\frac{3l}{2}\right) = 3gl$$

$$V = \sqrt{3gl}$$

உந்தகாப்பு விதிப்படி



$$m\sqrt{3gl} = (M+m)V_1$$

$$V_1 = \frac{m\sqrt{3gl}}{M+m}$$

$$F = ma \downarrow$$

$$(M+m)g - \frac{2Mg}{l}x = (M+m)\ddot{x}$$

$$\left(M + m - \frac{2M}{l}x\right)g = (M+m)\ddot{x}$$

$$(M+m)\ddot{x} = -\left[\frac{2M}{l}gx - (M+m)g\right]$$

$$= -\frac{2Mg}{l}\left[x - \frac{(M+m)}{2M}l\right]$$

$y = x - \frac{(M+m)}{2M}l$ என்க

$$\ddot{y} = \ddot{x}$$

$$\therefore \quad (M+m)\ddot{y} = \frac{2Mg}{l}y$$

$$\ddot{y} = -\frac{2Mg}{(M+m)l}y$$

$$\ddot{y} = -w^2 y$$

∴ இயக்கம் S.H.M ஆகும்

$T = \frac{2\pi}{w}$, அதிர்வெண் $f = \frac{1}{T} = \frac{w}{2\pi} = \sqrt{\frac{2Mg}{(M+m)l}} \therefore \frac{1}{2\pi}$

www.lkou.lk

17. திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P ஆனது இயற்கை நீளம் l ஐயும் மீள்தன்மை மட்டு $4mg$ ஐயும் உடைய ஒரு மீள்தன்மை இழை AB யின் நுனி A உடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கும் அதேவேளை நுனி B ஆனது தரையிலிருந்து $2l$ இலும் கூடிய உயரத்தில் இருக்கும் ஒரு நிலைத்த புள்ளியுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. துணிக்கை P ஆனது B யிலே ஓய்வில் வைக்கப்பட்டு, ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றது.
சக்திக் காப்புக் கோட்பாட்டினைப் பயன்படுத்தி,

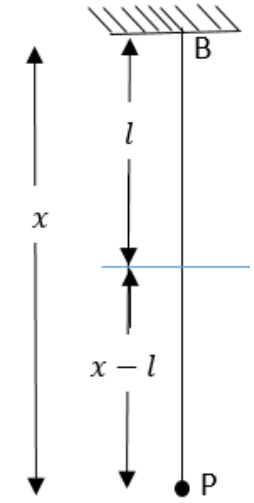
I. இழையின் உயர் நீளம் $2l$ எனக் காட்டி,

II. இழை மட்டுமட்டாக ஈர்க்கப்பட்டிருக்கும் போது P யின் வேகத்தைக் காண்க. நேரம் t யில் இழையின் நீளம் $x(>l)$ எனக் கொள்வோம். P யின் வேகம் x ஐத் துணிவதற்கான சமன்பாட்டினை எழுதுக.இச்சமன்பாட்டிலிருந்து $\ddot{y}+\frac{4g}{l}y=0\,;\,y\geq-\frac{l}{4}$ என்னும் வடிவத்தில் உள்ள சமன்பாடு கிடைக்கின்றதெனக் காட்டுக.
இங்கே $y=x-\frac{5l}{4}$
y யிற்காக $y=A\cos\omega t+B\sin\omega t$ வடிவத்தில் உள்ள ஒரு தீர்வைக் கருத்திற் கொண்டு A,B,ω ஆகிய மாறிலிகளைக் காண்க.

இதிலிருந்து,

III. y யின் உயர் பெறுமானத்தைத் துணிந்து அதன் மூலம் இழையின் உயர் நீளத்தைப் பெறுக.

IV. P யின் அதியுயர் கதியைக் காண்க.



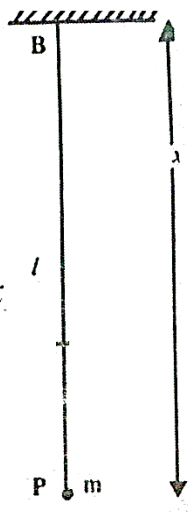
இயற்கை நீனம் l $\lambda=4mg$ அதி உயர் நீளம் $=x$ என்க

சக்திக் காப்புத் தத்துவத்தின் படி

$$\frac{1}{2}(4mg)\frac{(x-l)^2}{l}=mgx$$

$$2(x-l)^2=lx$$
$$2x^2-4lx+2l^2-lx=0$$
$$2x^2-5lx+2l^2=0$$
$$(2x-l)(x-2l)=0$$
$x=2l \quad or \quad x=\frac{l}{2}$ பொந்தாது. $(x>l)$ ∴ அதி உயர் நீளம் $=2l$

(ii) இழை இழக்கப்பட்டு உள்ள போது P யின் கதி v என்க



சக்திக் காப்புத் தத்துவத்தின்படி $\frac{1}{2}mv^2=mgl$

$$v=\sqrt{2gl}$$

சக்திக் காப்புத் தத்துவத்தின்படி $\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}4mg\frac{(x-l)^2}{l}=mgx$

நேரம் t யைக் குறித்து வகையிட, $\frac{1}{2}m\,\dot{x}\,\ddot{x}\;\;\dot{x}+\frac{1}{2}4\,mg.\frac{2(x-l)}{l}.\dot{x}=mg\dot{x}$

$$x\neq0,\quad \ddot{x}+\frac{4g}{l}(x-l)=g$$

$$\ddot{x}=-\frac{4g}{l}x+4g+g$$

$$=-\frac{4g}{l}\left(x-\frac{5l}{4}\right)\text{ ———— ①}$$

www.lkqu.lk

$y = x - \frac{5l}{4}$ எனின்,

$\ddot{y} = \ddot{x}$

① $\Rightarrow$ $\ddot{y} = -\frac{4g}{l}y$

$\ddot{y} + \frac{4g}{l}y = 0$ ——————— ②

$y = A\cos\omega t + B\sin\omega t$

$\dot{y} = -A\,\omega\sin\omega t + B\,\omega\cos\omega t$

$\ddot{y} = -A\,\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t = -\omega^2 y$ ——— ③

②இல் பிரதியிட $-\omega^2 y + \frac{4g}{l}y = 0$

$\omega^2 = \frac{4g}{l}$

$\omega = 2\sqrt{g/l}$ $\omega > 0$

$t = 0$ இல் $y = -l/4$

$y = A\cos\omega t + B\sin\omega t.$

$-l/4 = A\times 1 + 0 \Rightarrow A = -l/4$

③ $\Rightarrow$ $t = 0$, $\dot{x} = \dot{y} = \sqrt{2gl}$

$\sqrt{2gl} = -A\times 0 + B\omega$

$B = \frac{\sqrt{2gl}}{w} = \frac{\sqrt{2gl}}{2\sqrt{g/l}} = \frac{\sqrt{2gl}}{2\sqrt{g}}.\sqrt{l} = \frac{l}{\sqrt{2}}$

$y = -\frac{l}{4}\cos\omega t + \frac{l}{\sqrt{2}}\sin\omega t$

(iii) $y_{max} = ?$ $y = \frac{l}{\sqrt{2}}\sin\omega t - \frac{l}{4}\cos\omega t$

$\sqrt{\left(l/\sqrt{2}\right)^2 + \left(-l/4\right)^2} = \sqrt{l^2/2 + l^2/16} = l\sqrt{9/16} = \frac{3l}{4}$

$y = \frac{3l}{4}\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}\sin\omega t - \frac{1}{3}\cos\omega t\right]$

$= \frac{3l}{4}\sin(\omega t - \alpha)$ இங்கு $\sin\alpha = 1/3$

$\therefore \alpha = 2\sqrt{2}/3$

y உயர்வு $= \frac{3l}{4}$

அதி கூடிய நீளம் $= x$ உயர்வு

$= y$ உயர்வு $+ \frac{5l}{4}$

$= \frac{3l}{4} + \frac{5l}{4} = 2l$

(iv) $y = \frac{3l\omega}{4}\cos(\omega t - \alpha)$

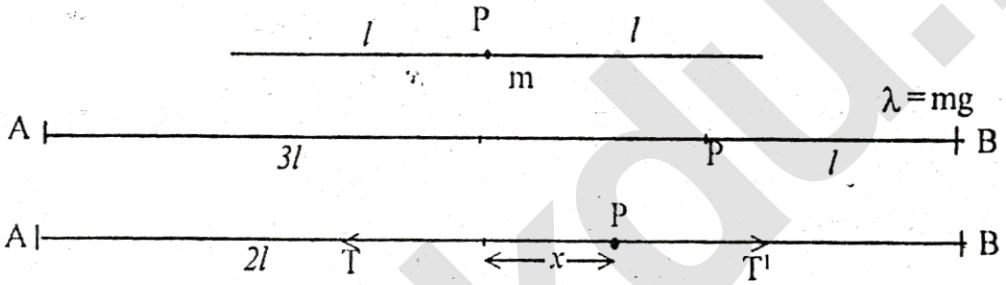
S.H.M இல் அதி உயர் கதி

அதி உயர் கதி $= \frac{3l\omega}{4}$

அதி உயர் கதி $= \dot{y}$ உயர்வு $= \frac{3}{2}\sqrt{gl}$

www.lkdu.lk

18. திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P ஆனது இயற்கை நீளம் $2l$ ஐயும் மட்டு mg யையும் உடைய ஒரு மீள்தன்மை இழையின் நடுப்புள்ளியில் கட்டப்பட்டுள்ளது. ஓர் ஒப்பமான கிடை மேசை மீது $4l$ இடைத்தூரத்தில் இருக்கும் A, B என்னும் இரு நிலைத்த புள்ளிகளுடனும் இழையின் இரு நுனிகளும் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. தொடக்கத்திலேயே A, P, B ஆகியன ஒரு நேர்கோட்டில் $AP = 3l$ ஆக இருக்குமாறு உள்ள போது அத்தானத்தில் ஓய்விலிருந்து P விடுவிக்கப்படுகின்றது. $AP = 2\,l + x$ ஆக இருக்குமாறு உள்ள ஒரு தானத்தில் துணிக்கை P இருக்கும் போது அதன் இயக்கச் சமன்பாடுகளை எழுதுக. இதிலிருந்து சமன்பாடு $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ ஐப் பெறுக. இங்கு $\omega^2 = \frac{2g}{l}$ ஆகும். P யின் எளிய இசை இயக்கத்தின் மையம், வீச்சம், ஆவர்த்தனம் ஆகியவற்றைக் காண்க. அத்தோடு, துணிக்கையின் உயர் கதியையும் அக்கதியை அடைவதற்கு எடுத்த மிகக் குறுகிய நேரத்தையும் காண்க.



$$T = \frac{\lambda\,(l+x)}{l} = \frac{mg}{l}(l+x) \qquad T' = \frac{\lambda}{l}(l-x) = \frac{mg}{l}(l-x)$$

$\rightarrow$ F = ma $T' - T = m\ddot{x}$

$$\frac{mg}{l}(l-x) - \frac{mg}{l}\frac{(l+x)}{l} = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} = \frac{-2gx}{l} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{2gx}{l} = 0$$

இது $\ddot{x} + w^2 x = 0$ எனும் வடிவில் உள்ளது

$$w^2 = \frac{2g}{l}$$

$v^2 = w^2(a^2 - x^2)$ இங்கு a - வீச்சம்

$x = l$ ஆகும் போது $\ddot{x} = 0 \Rightarrow a = l$

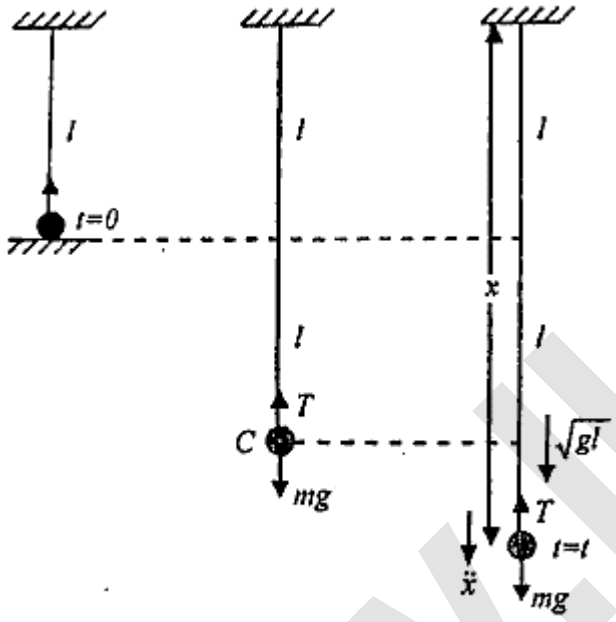
மையம் $x = 0$, AB யின் நடுப்புள்ளி, அலைவு காலம் = $\frac{2\pi}{w} = \frac{2\pi}{\sqrt{2g/l}} = \pi\sqrt{\frac{2l}{g}}$

அதி உயர் கதி = $wl = \sqrt{2gl}$ இதை அடைய எடுத்த நேரம் = $\frac{\pi}{2w} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{2g}}$

www.lkdu.lk

19. திணிவு m ஐ உடைய துணிக்கை ஒன்று இயற்கை நீளம் l ஐ உடைய இலேசான மீள்தன்மை இழை ஒன்றின் நுனி ஒன்றுடன் தொடுக்கப்பட்டு நாப்பத்திலே (சமநிலையிலே) தொங்குகின்றது. இழையின் மற்றைய நுனி ஒரு நிலைத்த புள்ளி O வுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. O விற்குக் கீழே இடப்பெயர்ச்சி $2l$ ஆன ஒரு புள்ளி C யிலே துணிக்கை இருப்பின் இழையின் மீள்தன்மை மட்டு mg எனக் காட்டுக.

இப்போது C யிலிருந்து தொடக்கக் கதி $\sqrt{gl}$ உடன் துணிக்கை நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கி எறியப்படுகின்றது. நேரம் t யிலே அதன் O விலிருந்தான கீழ்முக இடப்பெயர்ச்சி x ஆகும். $\ddot{x} + \frac{g}{l}(x - 2l) = 0$ எனக் காட்டி துணிக்கையின் எளிய இசை இயக்கத்தின் மையத்தையும் ஆவர்த்தன காலத்தையும் இனங்காண்க. x இன் உயர் பெறுமானத்தையும் இழிவுப் பெறுமானத்தையும் பெறுக.



$T = mg$

$\lambda\left(\frac{l}{l}\right) = mg \Rightarrow \lambda = mg$

$t = t$ இல், $T = mg\left(\frac{x - l}{l}\right)$

$mg - T = m\ddot{x}$

$mg - mg\left(\frac{x - l}{l}\right) = m\ddot{x}$

$\ddot{x} = g\left(\frac{l - x + l}{l}\right)$

$\ddot{x} + \frac{g}{l}(2l - x) = 0 \quad \rightarrow \quad (l$

Put, $2l - x = y$, $\therefore -\ddot{y} = \ddot{x}$ என (l) இல் இட,

$$-\ddot{y} = \frac{g}{l}y \Rightarrow \ddot{y} = -\frac{g}{l}y$$

$$\ddot{y} = -\omega^2 y, \quad \omega = \sqrt{y/l}$$

$\therefore$ துணிக்கை இயக்கம் *S.H.M.* ஆகும்.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{l/g}$$

$y = 0 \Rightarrow x = 2l$ $\therefore$ புள்ளி C அலைவுமையம்

$v^2 = \omega^2(a^2 - x^2)$

$v_c^2 = \frac{g}{l}(a^2 - 0) \Rightarrow a = l$

$\therefore x_{max} = 2l + l = 3l$

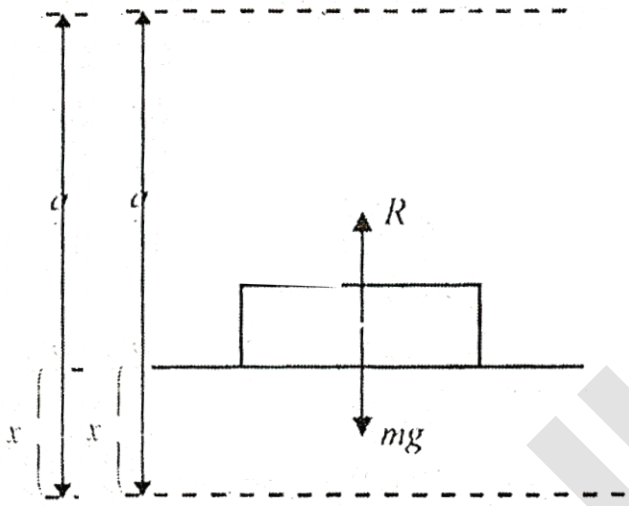
$x_{min} = 2l - l = l$

www.ikou.lk

20. திணிவு m ஆன குற்றி ஒன்று கிடை மேடை ஒன்றின் மீது தொடர்பு ஓய்வில் இருக்கும் அதே வேளை மேடை வீச்சம் a யையும் ஆவர்த்தனம் T யையும் உடைய நிலைக்குத்தான எளிய இசை அலைவுகளை ஆற்றுகின்றது. மேடையின் இடைத்தானத்திலிருந்து அதன் இடப்பெயர்ச்சியானது மேன்முக நிலைக்குத்துத் திசையில் அளக்கப்படும் x ஆக இருக்கும் போது மேடையினால் குற்றி மீதுள்ள மறுதாக்கம் $m\left(g-\frac{4\pi^2x}{T^2}\right)$ எனக் காட்டுக.

$T=1s$ எனின் மேடையிலிருந்து குற்றி வெளியே வீசப்படாமல் இருக்கத்தக்க அதியுயர் வீச்சத்தை மீற்றரில் உய்த்றிக.

($\pi^2 \simeq 9.8$ எனவும் ஈர்ப்பினாலான ஆர்முடுகல் g ஆனது ms^{-2} இல் அதே பெறுமானத்தை எடுக்கிறது எனவும் கொள்க.



$R - mg = m\ddot{x}$

$T = 2\pi/w \Rightarrow w = 2\pi/T$

$\therefore R - mg = m(-xw^2)$

$R = mg + m(-x \cdot 4\pi^2/T^2)$

$R = m\left(g-\frac{4\pi^2x}{T^2}\right)$

வீசப்படாதிருக்க, $R \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{gT^2}{4\pi^2} \Rightarrow x \leq \frac{g}{4\times g} \Rightarrow x \leq 1/4$

$x_{max} = 1/4 \Rightarrow a_{max} = 1/4\, m$

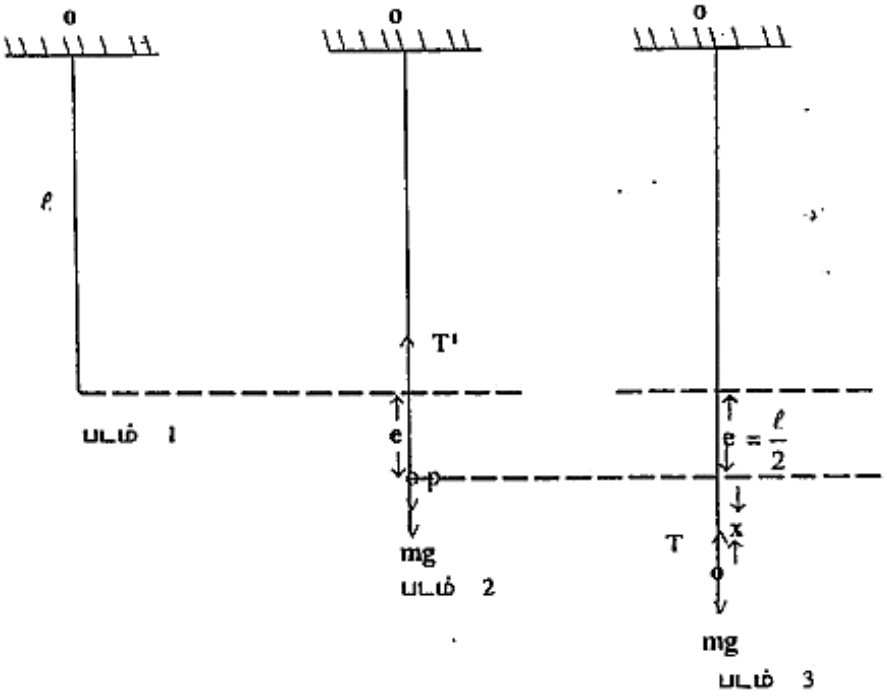
($\because$ ($\because R$ ஆனது அதி இழிவுப் பெறுமதியை x a இல் எடுக்கும்)

21. திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P ஆனது இயற்கை நீளம் l ஐயும் மட்டு $2mg$ ஐயும் உடைய இலேசான மீள் தன்மை இழை ஒன்றின் நுனி ஒன்றுடன் தொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இழையின் மற்றைய நுனி ஒரு நிலைத்த புள்ளி O உடன் தொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இழை நிலைக்குத்தாக இருக்கும் போது துணிக்கை அதன் சமநிலைத் தானத்திலிருந்து d தூரம் கீழே இழுத்து ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றது. துணிக்கை P யின் சமநிலைத்தானத்திலிருந்து கீழே நிலைக்குத்து இடப்பெயர்ச்சியானது நேரம் t யிலே x எனின்,

$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{2g}{l}x=0$ எனக் காட்டுக.

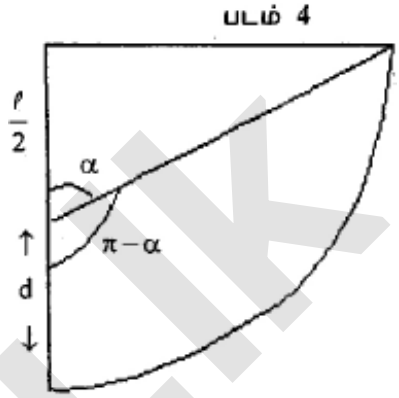
I. $d<\frac{l}{2}$ எனின் துணிக்கை அதன் சமநிலைத் தானம் பற்றி ஆவர்த்தன காலம் $\pi\sqrt{\frac{2l}{g}}$உடன் எளிய இசை இயக்கத்தில் ஈடுபடுகிறது எனவும் இழை தளராமல் இருக்கும் எனவும் காட்டுக.

www.lkdu.lk



பின்னர் இழை தளரும் எனக்

படம் 4



படம் (2)

சமநிலையில் நீட்சி e எனில்

$$mg = T' = \lambda\frac{e}{\ell} = 2mg\cdot\frac{e}{\ell}$$

$$\therefore e = \frac{\ell}{2}$$

படம் (3)

இழுவை $= T = 2mg\dfrac{\left(\frac{\ell}{2}+x\right)}{\ell}$

$F = ma \downarrow$

$$mg - T = m\ddot{x}$$

$$mg - 2mg\frac{\left(\frac{\ell}{2}+x\right)}{\ell} = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} = -\frac{2g}{\ell}x$$

$\ddot{x} = -w^2x$. என்னும் வடிவில் உள்ளது இங்கு $w^2 = \frac{2g}{\ell}$

∴ இயக்கம் ஓர் எளிமை இசை இயக்கம் ஆகும்.

(i) இங்கு $d < \frac{\ell}{2}$ எனில்

அலைவு மையம், $x = 0$

அலைவின் வீச்சம் = d

$d < \frac{\ell}{2}$ எனின் $T>0$, d என்னும் வீச்சமுடன் எளிய அலைவு இசை இயக்கம் சாத்தியம்.

அலைவு காலம் $T = \frac{2\pi}{w} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{2g}} = \pi\sqrt{\frac{2\ell}{g}}$

(ii) $d > \frac{l}{2}$ படம் (b) யிலிருந்து

$\frac{\pi-\alpha}{w}$ நேரத்தின் பின்னர் இழைதொய்யவும் இங்கு $w = \sqrt{\frac{2g}{\ell}}$

$$\frac{\pi-\alpha}{w} = \pi\sqrt{\frac{\ell}{2g}} - \sqrt{\frac{\ell}{2g}}\cos^{-1}\left(\frac{\ell}{2d}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{\ell}{2g}}\left\{\pi - \cos^{-1}\left(\frac{\ell}{2d}\right)\right\}$$

www.lkou.lk

வேறுமுறை

$$\ddot{x} + w^2 x = 0$$

எனும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க. $x = A\cos wt + B\sin wt$. என்பதை பிரயோகிக்க இங்கு $w^2 = \frac{2g}{\ell}$

(i) $d < \frac{\ell}{2}$

$x = d,\ t = O \Rightarrow d = A$

$= T_1$ அலைவு காலம், என்க $x = d \quad \Rightarrow d = d\cos wT_1$

$$\therefore T_1 = \frac{2\pi}{w} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{2g}}$$

$$T_1 = \pi\sqrt{\frac{2\ell}{g}}$$

(ii) $d > \frac{\ell}{2}$

$x = d,\quad t=o,\quad A=d$

$t = T_2$

$x = -\frac{\ell}{2} \qquad t = T_2 \Rightarrow -\frac{\ell}{2} = d\cos wT_2$

$$\frac{\ell}{2d} = \cos(\pi - wT_2)$$

$$T_2 = \sqrt{\frac{\ell}{2g}}\left[\pi - \cos^{-1}\left(\frac{\ell}{2d}\right)\right]$$

22. இயற்கை நீளம் l ஐயும் மீள்தன்மை மட்டு λ வையும் உடைய இலேசான இழை ஒன்றின் ஒரு நுனியானது m திணிவுடைய P என்னும் ஒரு துணிக்கையுடன் இணைக்கப்பட்டிருக்க, அதன் மறு நுனியானது O என்னும் ஒரு புள்ளியில் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. l நீளமுள்ள இலேசான நீளா இழை ஒன்றின் ஒரு நுனியானது m திணிவையே கொண்ட Q என்னும் ஒரு துணிக்கையுடன் இணைக்கப்பட்டிருக்க அதன் மறு நுனியானது P உடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. P ஆனது OQ வின் நடுப் புள்ளியாக அமையுமாறு OPQ என்பது நிலைக்குத்தான ஒரு நேர் கோட்டிலும் OP, இயற்கை நீளம் l ஆகவும் இருக்க தொடக்கத்தில் ஓய்விலே பிடிக்கப்பட்டிருக்கும் தொகுதியானது ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகிறது. நேரம் t யிலே நீளம் OP ஆனது $l + x$ ஆகும். P, Q ஆகிய துணிக்கைகளுக்கான இயக்கச் சமன்பாடுகளை எழுதி இதிலிருந்து $\ddot{x} + \omega^2(x\frac{g}{\omega^2}) = 0$ எனக் காட்டுக: இங்கு $\omega^2 = \frac{\lambda}{2ml}$

$x = \frac{g}{\omega^2} + A\cos\omega t + B\sin\omega t$ என்பது நேரம் t இலே, துணிக்கை P யின் அமைவைக் கொடுக்கின்றவாறு A, B ஆகிய மாறிலிகளின் பெறுமானத்தைத் துணிக. இதிலிருந்து,

I. அடுத்து நிகழும் இயக்கத்திலே இழை OP யின் நீளம் ஒரு போதும் l இலும் பார்க்க குறைவாக இருக்காதெனவும்

II. இழை PQ வில் உள்ள இழுவை $2mg\sin^2(\omega t/2)$ எனவும் காட்டுக.

மீள் தன்மை இழையின் உயர் நீட்சி $2l$ எனின், λ வின் பெறுமானத்தைக் கண்டு, மேலும் உயர் நீட்சி முதன் முறையாக எய்தப்படுவது $\pi\sqrt{l/g}$ என்னும் நேரத்தில் எனவும் காட்டுக.

www.kdu.lk

P இற்கு $\downarrow$ F - ma ஐப் பிரயோகிக்க

$T_1 + mg - T = m\ddot{x}$ (1)

Q இற்கு $\downarrow$ F = ma ஐப் பிரயோகிக்க

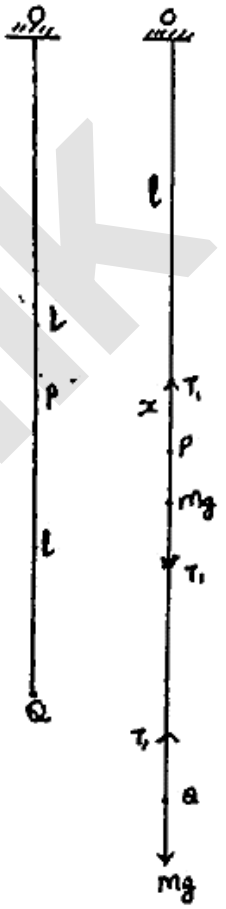
$mg - T_1 = m\ddot{x}$ (2)

$T = \lambda/\ell x$ (3)

(1) + (2) + (3) $\Rightarrow$ $2mg = 2m\ddot{x} + \lambda/\ell x$

$\ddot{x} + \lambda/2m\ell x = g$

$\ddot{x} + w^2(x - g/w^2) = 0$ (4)



இங்கு $w^2 = \lambda/2m\ell$

$x = g/w^2 + A\cos wt + B\sin wt$

$\dot{x} = -Aw\sin wt + Bw\cos wt$

$t = 0$ ஆக $x = 0 \Rightarrow A = -g/w^2$

$t = 0$ ஆக $\dot{x} = 0 \Rightarrow B = 0$

$\therefore x = g/w^2(1 - \cos wt)$ (5)

(i) $x = g/w^2(1 - \cos wt) \geq 0$, எல்லா t இற்கும்.

$\therefore OP = r + x \geq r$

(ii) (5), (4) $\Rightarrow$ $\ddot{x} = -w^2(x - g/w^2) = g\cos wt$

$\therefore$ (2) இலிருந்து $T_1 = mg - mg\cos wt = 2mg\sin^2 wt/2$

$\dot{x} = 0$ ஆக x உயர்வாகும்.

$g/w\sin wt = 0$ ஆக x உயர்வாகும்

$\therefore t = \pi/w$

இனி $t = \pi/w$ எனின் $x = g/w^2(1 - \cos\pi) = 2g/w^2$

$= \frac{2g}{(\lambda/2m\ell)} = \frac{4mg\ell}{\lambda}$

ஆனால் உயர் நீட்சி $= 2\ell$

$\therefore 4mg\ell/\lambda = 2\ell \quad \lambda = 2mg$

மேலும் உயர் நீட்சி முதன்முறை எய்தப்படும் நேரம்.

$= \pi/w$

$= \pi\sqrt{\frac{2m\ell}{\lambda}} = \pi\sqrt{\frac{2m\ell}{2mg}} = \pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

23. திணிவு m உடைய ஒரு துணிக்கை P ஆனது ஒரு தூரம் $4l$ இனால் வேறாக்கப்பட்ட இரு சுவர்களுக்கு செங்குத்தாக உராய்வில்லாத நேர்க் கிடைப் பாதை ஒன்றில் அலைகின்றது. அது இயற்கை நீளம் l ஐயும் இறுக்கம் K யையும் உடைய பூரண வில் ஒன்றினாலே ஒரு சுவர் மீதுள்ள ஒரு புள்ளி A உடனும் பூரணச் சர்வசம வில் ஒன்றினாலே மற்றைய சுவர் மீதுள்ள ஒரு புள்ளி B உடனும் தொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இவ்விற்கள் துணிக்கையைப் பாதை வழியே தள்ளி இழுக்கின்றன. நேரம் t யில் $AP = x$ எனின்.

I. $x \leq l$

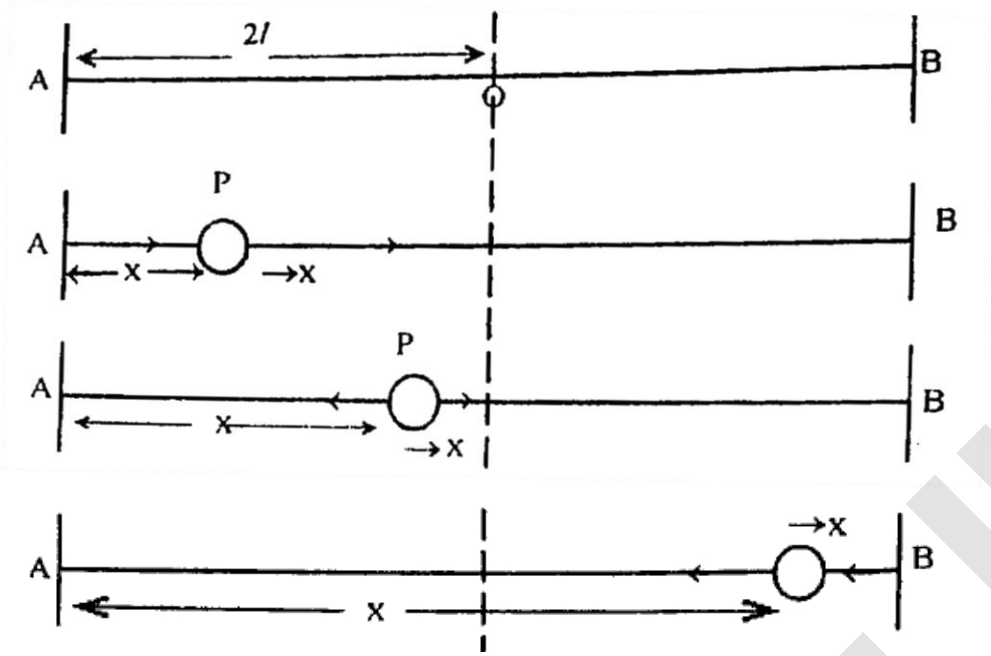
II. $l \leq x \leq 3l$

III. $3l \leq x \leq 4l$

ஆக இருக்கும் போது துணிக்கையின் இயக்கச் சமன்பாடுகளைப் பெற்று அவை ஒரே வடிவத்தை உடையவெனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, இயக்கம் எப்போதும் ஆவர்த்தனமானது எனவும் ஆவர்த்தனம் $2\pi\sqrt{m/2k}$ எனவும் காட்டுக. துணிக்கையின் அதியுயர் இயல்தகு கதியைக் காண்க.

www.ikau.lk



(i)ல் $(4l - x - l)\,k + (l - x)k = mx = m\frac{d^2x}{dt^2}$

$\Rightarrow x = 2k/m\,(2l - x)$ ---------(1)

(ii)ல் $(4l - x - l)k - (x - l)k = mx$

$\Rightarrow x = 2k/m.(2l - x)$ -------- (2)

(iii)ல $-(x - l)k - [l-(4l - x)]k = mx$

$\Rightarrow x = 2k/m(2l - x)$ -------- (3)

$x = x - 2l$ இட

$x = -2k/m\ x$

இயக்கம் எளிமை இசையியக்கம் (ஆவர்த்தன)

காலம் $T = 2\pi/w$ இங்கு $W = \sqrt{2k/m}$

$x = 0 \iff x = 2l$

இதிலிருந்து 0 ஆனது எளிமை இசை இயக்கத்தின் மையம்ஆகும்.

கணக்கின் வெளிப்படையினால் வீச்சம் = $R \leq 2l$

$V = x = dx/dt$

$V^2 = w^2\ (R^2 - x^2)$

$\Rightarrow V_{உயர்வு} = w\ R_{உயர்வு}$

$\Rightarrow V_{உயர்வு} = 2lw$

$= 2l\sqrt{2k/m}$

குறிப்பு:

$$[K]^{-1} = \frac{[(\text{காலம்})^2]}{[m]}$$

$$\Rightarrow [k] = \frac{M}{T^2} = \frac{MLT^{-2}}{L} = \frac{[\text{விசை}]}{[\text{நீளம்}]}$$

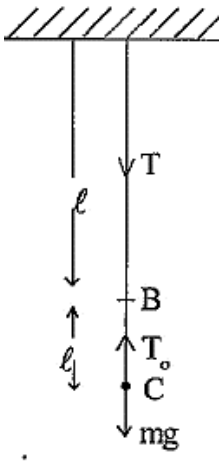
$\Rightarrow$ [விசை] = [k] [நீளம்]

www.lkau.lk

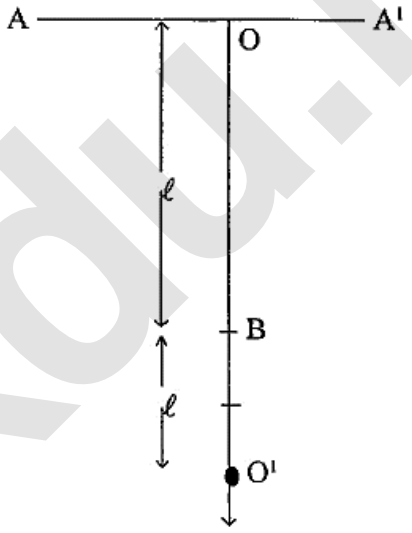
24. m திணிவுள்ள துணிக்கை ஒன்று இயற்கை நீளம் l ஆகவுள்ள இலேசான மீள்தன்மை இழையின் ஒரு முனையுடன் இணைக்கப்பட்டுத் தொங்கவிடப்பட்டு மற்றைய முனை O என்னும் நிலைத்த புள்ளியுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. சமநிலையில் துணிக்கையானது O யிலிருந்து கீழே $2l$ தூரத்திலுள்ள C என்னும் புள்ளியில் காணப்படின் இழையின் மீள்தன்மை மட்டு mg எனக் காட்டுக. இப்போது துணிக்கை C இலிருந்து கீழ் நோக்கி நிலைக்குத்தாக $\sqrt{gl}$ என்னும் வேகத்துடன் எறியப்படுகின்றது. t நேரத்தில் O இலிருந்து கிழே துணிக்கையின் இடப்பெயர்ச்சி x எனின், $\frac{g}{l}(x-2l)=0$ எனக் காட்டுக.

துணிக்கையின் எளிமை இசை இயக்கத்தின் அலைவு மையம், அலைவு காலம் என்பவற்றைக் காண்க.

x இன் உயர், இழிவுப் பெறுமானங்களைக் காண்க.



வரிப்படம் - 1



வரிப்படம் - 2

வரிப்படம் - $T_0 = mg$ இன் படி

$$\frac{\lambda\,\ell}{\ell} = mg$$

$$\therefore\ \lambda = mg$$

வரிப்படம் - 2 இன் படி

துணிக்கைக்கு $\underline{F} = m\underline{a}$ ஐப் பிரயோகிப்பதால்

$$mg - T = m\ddot{x}$$

$$mg - \frac{mg(x-l)}{l} = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{g}{l}(x-\ell) - g = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{g}{l}(x-2l) = 0$$

$x - 2l = X$ எனப் பிரதியிடுவோம்.

$\therefore \ddot{x} = \ddot{x}$

ஆகவே சமன்பாடு $\ddot{X} + \frac{g}{l}X = 0$

$\ddot{X} + \omega^2 X = 0$ இங்கு $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

www.lkdu.lk

இது $X=0$ ஐ அதாவது $x=2l$ ஐ அலைவு மையமாகவும் $\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$ ஆகவும் உள்ள எளிமை இசை இயக்கத்தைக் குறிக்கின்றது.

இங்கு $x=2l$ அதாவது $x-2l=0$

எளிமை இசை இயக்கத்தின் அலைவு காலம்

$\dot{x}^2=\omega^2\left(A^2-X^2\right)$ என்ற சமன்பாட்டைக் கருதுவோம்.

அதாவது $X^2=\omega^2\left[A^2-(x-2l)^2\right]$

$x=2l$ இல் $\dot{x}=\sqrt{gl}$

இவற்றைப் பிரதியிடுவதால்

$$gl=\frac{g}{l}\left[A^2-0^2\right]$$

$\therefore A^2=l^2$

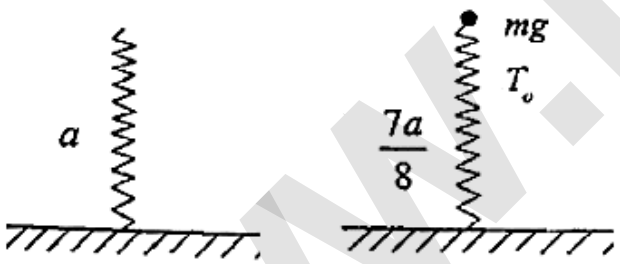
$\therefore A=l$

ஆகவே வீச்சம் l ஆகும்.

$\therefore x$ இன் உயர் பெறுமானம் $=2l+l=3l$

x இன் இழிவுப் பெறுமானம் $=2l-l=l$

25. இயற்கை நீளம் a ஆகவுள்ள இலேசான சுருளி வில்லொன்றின் கீழ் முனை நிலைத்த புள்ளியொன்றுடன் இணைக்கப்பட்டு சுருளி வில் நிலைக்குத்தாய் பேணப்பட்டுள்ளது. m திணிவுள்ள துணிக்கையொன்றை அதன் மேல் முனைக்கு இணைத்த போது வில்லானது $a/8$ என்ற தூரத்தால் அமுக்கப்பட்டது. இத்துணிக்கை சமநிலையில் காணப்படும் போது, இதிலிருந்து நிலைக்குத்தாக மேலே $3a/8$ என்ற உயரத்திலிருந்து m திணிவுள்ள இரண்டாவது துணிக்கை ஓய்விலிருந்து விழ விடப்படுகிறது. இரண்டாவது துணிக்கை முதலாவது துணிக்கையை மோதி அதனுடன் ஒன்றித்து விடுகிறதெனின், பின்னர் நிகழும் துணிக்கைகளின் இயக்கம் எளிமை இசை இயக்கம் எனக் காட்டி அதன் வீச்சத்தை காண்க.



சம நிலையில்

$T_0=mg$

$\lambda\frac{\frac{a}{8}}{a}=mg$

$\therefore \lambda=8mg$

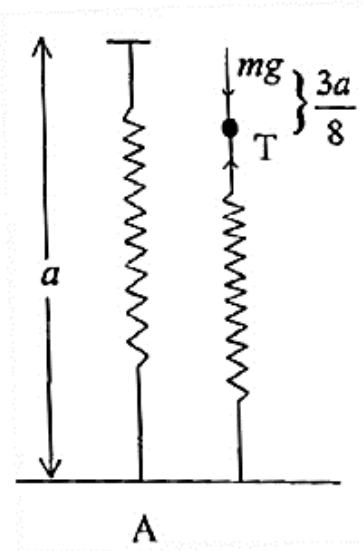
இரண்டாம் துணிக்கை முதலாம் துணிக்கையை மோதும் போது வேகம் V எனின்

$v^2=u^2+2as$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து.

$$v^2=0+2g.\left(\frac{3a}{8}\right)$$

$$=\frac{3ag}{4}$$

$$\therefore v=\frac{\sqrt{3ag}}{2}$$



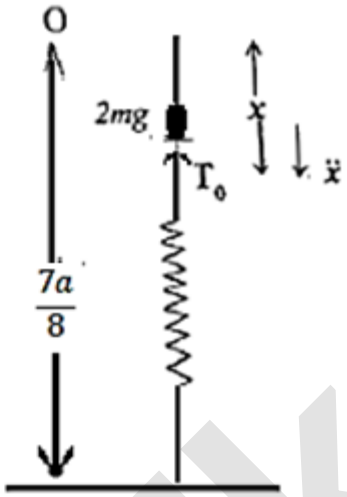
இரண்டு துணிக்கைகளும் ஒன்றித்த பின் வேகம் V_1 எனக.

$\downarrow I=\Delta(mv)$ என்ற சூத்திரத்தைப் பிரயோகிப்பதால்

$$0=2m(v_1)-m(0)-m\times x\left(\frac{\sqrt{3ga}}{2}\right)$$

$$\therefore v=\frac{\sqrt{3ga}}{4}$$

இப்போது A என்ற சமநிலைப் புள்ளியிலிருந்து துணிக்கைகள் x தூரம் அமுக்கப்பட்டிருக்கும் நிலையைக் கருதுவோம்



$$\therefore 2mg - T = 2m\ddot{x}$$

$$2mg - \frac{8mgx}{a} = 2m\ddot{x}$$

$$\ddot{X} + \frac{4gx}{a} - g = 0$$

$$\ddot{X} + \frac{4g}{a}\left[x - \frac{a}{4}\right] = 0$$

$$w = \sqrt{\frac{4g}{a}},\ x - \frac{a}{4} = X$$

$$\ddot{x} = \ddot{X}$$

ஆகவே சமன்பாடு $\ddot{X} + \omega^2 X = 0$

இது $X = 0$ ஐ அதாவது $x = \frac{a}{4}$ ஐ அலைவு மையமாகக் கொண்ட எளிமை இசை இயக்கத்தைக் குறிக்கின்றது. இதன் வீச்சம் A எனக.

$$\dot{X}^2 = \omega^2\left(A^2 - X^2\right)$$

$$\dot{x}^2 = \frac{4g}{a}\left[A^2 - \left(x - \frac{a}{4}\right)^2\right]$$

$x = a/8$ இல் $\dot{x} = \frac{\sqrt{3ga}}{4}$ இவற்றைப் பிரதியிடுவதால் $\frac{3ga}{16} = \frac{4g}{a}\left[A^2 - \left(\frac{a}{8} - \frac{a}{4}\right)^2\right]$

$$\frac{3a}{16} = \frac{4}{a}\left[A^2 - \left(-\frac{a}{8}\right)^2\right] \Rightarrow \frac{3a}{16} = \frac{4}{a}\left[A^2 - \frac{a^2}{64}\right]$$

$$A^2 - \frac{a^2}{64} = \frac{3a^2}{64} \qquad \therefore A^2 = \frac{4a^2}{64} = \frac{a^2}{16} \qquad \therefore A = \frac{a}{4}$$

26. திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை இயற்கை நீளம் a ஐயும் மீள்தன்மை மட்டு $2mg$ ஐயும் உடைய ஓர் இலேசான இழையின் ஒரு நுனியுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இழையின் மற்றைய நுனி கிடையுடன் $30°$ யிற் சாய்ந்த ஓர் ஒப்பமான தளத்தில் உள்ள ஒரு நிலைத்த புள்ளி O யிற் பொருத்தப்பட்டுள்ளது. துணிக்கை சாய்தளத்தின் மீதும் இழை அதியுயர் சரிவுக் கோடு விழியேயும் உள்ளன. இழையின் நீளம் $2a$ ஆக இருக்கும் வரைக்கும் துணிக்கை சாய்தளத்தின் மீது O யிலிருந்து அதியுயர் சரிவுக் கோடு வழியே இழுக்கப்பட்டு மெதுவாக விடுவிக்கப்படுகின்றது. நேரம் t ஆக இருக்கும் போது இழையின் நீட்சி x எனக் கொள்வோம். துணிக்கையின் இயக்கத்திற்கு நீட்சி x ஆனது சமன்பாடு $\ddot{x} = \frac{-2g}{a}(x - \frac{a}{4})$ ஐத் திருப்தியாக்குகின்றது எனக் காட்டுக.

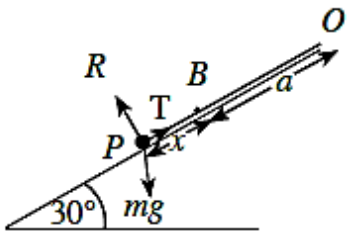
மேற்குறித்த சமன்பாட்டின் தீர்வு வடிவம் $x = \frac{a}{4} + A\cos\omega t + B\sin\omega t$ இல் உள்ளதெனக் கருதிக்கொண்டு A, B, ω ஆகிய மாறிலிகளின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

இதிலிருந்து துணிக்கையின் இயக்கம் எளிய இசை இயக்கமாக இருக்கும் போது இயக்கத்தின் மையத்தையும் வீச்சத்தையும் காண்க. துணிக்கை முதலில் இயற்கை நீளத்திற்கு வரும் போது அதன் கதி $\sqrt{ag}$ எனக் காட்டுக.

விடுவித்த கணத்திலிருந்து நேரம் $\left[\pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + 2\sqrt{2}\right]\sqrt{\frac{a}{2g}}$ இற்குப் பின்னர் துணிக்கை O யிற்கு வருகின்றது எனவும் காட்டுக. இழையின் நீளம் உயர்ந்தபட்சமாக இருக்கும் போது இழையின் இழுவையைக் காண்க.

www.lkou.lk

இழை இயற்கை நீளத்திலிருந்து x தூரம் இழுக்கப்படும்போது இழையின் இழுவை T எனின்,



$$T = \frac{\lambda x}{a} = \frac{2mgx}{a} \quad (5)$$

துணிக்கையின் இயக்கத்திற்கு $F = ma$

$$mg\sin 30° - T = m\ddot{x} \quad (10)$$

$$mg \times \frac{1}{2} - \frac{2mgx}{a} = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} = -\frac{2g}{a}\left(x - \frac{a}{4}\right) \text{ ——— } (1) \quad (5)$$

20

$$x = \frac{a}{4} + A\cos\omega t + B\sin\omega t \text{ ——— } (2)$$

$$\dot{x} = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t \text{ ——— } (3) \quad (5)$$

$$\ddot{x} = -A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t \text{ ——— } (4) \quad (5)$$

$$= -\omega^2(A\cos\omega t + B\omega\sin\omega t)$$

$$\ddot{x} = -\omega^2\left(x - \frac{a}{4}\right) \text{ ——— } (5) \quad (2) \text{ இருந்து } (5)$$

(1), (5) ஆகியவற்றைக் கருதும் போது $\omega^2 = \frac{2g}{a}$. (5)

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{a}}$$

$t = 0$ ஆக இருக்கும் போது $\dot{x} = 0$. (5)

(3) இலிருந்து $0 = B\omega$

$\omega \neq 0$ ஆகையால் $B = 0$. (5)

$t = 0$ ஆக இருக்கும்போது $x = a$. (5)

40

(2) இலிருந்து $a - \frac{a}{4} = A \Rightarrow A = \frac{3a}{4}$ (5)

$\therefore x = \frac{3a}{4}\cos\omega t + \frac{a}{4}$

$$x - \frac{a}{4} = \frac{3a}{4}\cos\omega t$$

துணிக்கையின் அலைவு மையம் $x - \frac{a}{4} = 0$ கிடைக்கின்றது. (5)

அதாவது $x = \frac{a}{4}$ அலைவு மையமாகும். (5)

10

www.ikdu.lk

வீச்சத்தில் $\dot{x} = 0$ அப்போது $t = t_1$ எனக் கொள்வோம்.

$0 = -A\omega \sin \omega t_1$ (5)

$\sin \omega t_1 = 0$

$\omega t_1 = n\pi \; ; \; n \in Z_0^+$ (5)

$x - \frac{a}{4} = \frac{3a}{4} \cos \omega t_1$

$x - \frac{a}{4} = \pm \frac{3a}{4}$ (5)

$\therefore$ துணிக்கையின் எளிய இசை இயக்கத்தின் வீச்சம் $= \frac{3a}{4}$ (5)

துணிக்கை முதலில் இயற்கை நீளத்திற்கு வரும்போது அதன வேகம் V எனக் கொள்வோம்.

அப்போது $x = 0$. (5)

$\frac{3a}{4} \cos \omega t = -\frac{a}{4}$

$\cos \omega t = -\frac{1}{3}$ (5)

$V = -A\omega \sin \omega t$

$= -\frac{3a}{4} \sqrt{\frac{2g}{a}} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \omega t}$

$= -\frac{3a}{4} \sqrt{\frac{2g}{a}} \sqrt{\frac{8}{9}}$ (5) $= -\frac{3a}{4} \sqrt{\frac{2g}{a}} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$= -\sqrt{ag}$

$x = 0$ ஆக இருக்கும்போது வேகம் $\uparrow \sqrt{ag}$ ஒடி. (5)

20

துணிக்கை முதலில் இயற்கை நீளத்திற்கு வருவதற்கு எடுக்கும் நேரம் t_0 எனக் கொள்வோம்.

அப்போது $x = 0$. (5)

$-\frac{a}{4} = \frac{3a}{4} \cos \omega t_0$

$\cos \omega t_0 = -\frac{1}{3}$ (5)

$\omega t_0 = \pi - \cos^{-1}(\frac{1}{3})$

$t_0 = \frac{1}{\omega} \left[\pi - \cos^{-1}(\frac{1}{3})\right] = \sqrt{\frac{a}{2g}} \left[\pi - \cos^{-1}(\frac{1}{3})\right]$ (5)

துணிக்கை O வரைக்கும் புவியீர்ப்பின் கீழ் இயங்குகின்றது.

B இலிருந்து O வரைக்கும் செல்வதற்கான நேரம் t_2 எனின்

www.lkdu.lk

$S = ut + \frac{1}{2} at^2$ ↑

$S = a,\ u = \sqrt{ag}\ , a = -g \sin 30°$

$a = \sqrt{ag}\, t_2 - \frac{1}{2} \frac{g}{2} t_2^2$ (5)

$\frac{g}{4} t_2^2 - \sqrt{ag}\, t_2 + a = 0$

$t_2 = \dfrac{\sqrt{ag} \pm \sqrt{ag - 4\frac{g}{4} a}}{\frac{g}{2}}$ $\therefore$ $t_2 = 2\sqrt{\frac{a}{g}}$ (5)

$\therefore O$ வரைக்கும் செல்வதற்கான நேரம் $t_0 + t_2$

$= \sqrt{\frac{a}{2g}} (\pi - \cos^{-1}(\frac{1}{3})) + 2\sqrt{\frac{a}{g}}$ (5)

$= \sqrt{\frac{a}{2g}} [\pi - \cos^{-1}(\frac{1}{3}) + 2\sqrt{2}]$ **30**

இழை புள்ளி A இல் உயர்ந்தபட்ச நீளத்தில் உள்ளது. அதாவது

$x = a$ ஆக இருக்கும்போது **10**

$T_A = \frac{\lambda a}{a} = \lambda$ (5)

27. இயற்கை நீளம் a யையும் மீள்தன்மை மட்டு $2mg$ ஐயும் உடைய ஓர் இலேசான மீள்தன்மை இழையின் இரு நுனிகளுடனும் திணிவுகள் முறையே M, m ஆன A, B என்னும் இரு துணிக்கைகள் இணைக்கப்பட்ட இழைகள் இழைக்கப்பட்டிருக்குமாறு ஒரு கரடான கிடை மேசை மீது ஓய்வில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. மேசைக்கும் ஒவ்வொரு துணிக்கைகளுக்குமிடையேயாக உராய்வுக் குணகம் ½ ஆகும். துணிக்கை B யிற்கு A யிலிருந்து அப்பால் மேசை வழியே ஒரு வேகம் $\sqrt{ga}$ யைக் கொடுக்கும்போது துணிக்கை A ஓய்வில் இருக்கின்றதெனக் கொண்டு இழையின் நீட்சி x ஆக இருக்கும் போது துணிக்கை B யின் இயக்கம் சமன்பாடு $\ddot{x} = -\frac{2g}{a}(x + \frac{a}{4})$ இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டுக.

இச் சமன்பாட்டிற்கு வடிவம் $x + \frac{a}{4} = \alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t$ இல் உள்ள ஒரு தீர்வு இருக்கின்றெனக் கொண்டு α, β, ω ஆகியவற்றைக் காண்க.

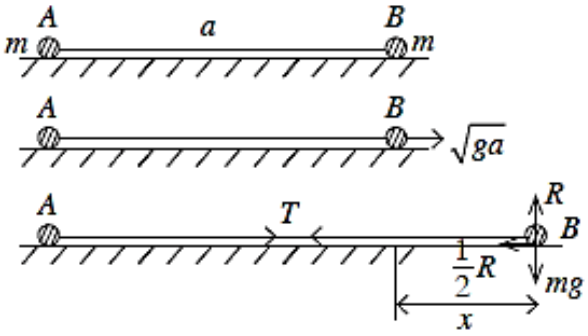
இதிலிருந்து இழையின் உயர்ந்தபட்ச நீட்சி $\frac{a}{2}$ எனக் காட்டுக.

அத்துடன் $M \geq 2m$ எனவும் காட்டுக.

துணிக்கை B யின் திரும்பிய இயக்கம் சமன்பாடு $\ddot{y} = -\frac{2g}{a}(y - \frac{a}{4})$ இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டுக. இங்கு y ஆனது இழையின் நீட்சியாகும்.

இச்சமன்பாட்டின் தீர்வு $y = \frac{a}{4}\left[1 + \cos\sqrt{\frac{2g}{a}}t\right]$ எனக் கொண்டு நேரம் $\left[\pi + \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right]\sqrt{\frac{a}{2g}}$ இற்குப் பின்னர் துணிக்கை B ஆனது தொடக்கம் புள்ளிக்கு வந்து மாறாமல் ஓய்வுக்கு வருகின்றதெனக் காட்டுக.

www.ikdu.lk



துணிக்கை B யிற்கு $\uparrow F = ma$ யைப் பிரயோகிக்கும்போது, $R = mg$

துணிக்கை B யிற்கு $\rightarrow F = ma$ யைப் பிரயோகிக்கும்போது, $-\frac{1}{2}R - T = m\ddot{x}$ (10)

இழையின் மீள்தன்மை மட்டு $2mg$ ஆகையால், $T = 2mg\frac{x}{a}$ (10)

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{2}mg - \frac{2mgx}{a} = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} = -\frac{2g}{a}\left(x + \frac{a}{4}\right) \text{ ——— (1)} \qquad (10)$$

$\therefore$ துணிக்கையின் இயக்கம் எளிய இசை இயக்கமாக இருக்கும் அதேவேளை அலைவு மையம் $x = -\frac{a}{4}$ இனால் தரப்படுகின்றது. (5)

$x + \frac{a}{4} = \alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t$ ——— (2) என எடுக்கும்போது

$t = 0$ இல் $x = 0$ ஆகையால் $\alpha = \frac{a}{4}$ (5)

t யைக் குறித்து வகையிடும்போது $\dot{x} = -\alpha\omega\sin\omega t + \beta\omega\cos\omega t$ ——— (3)

$t = 0$ இல் $\dot{x} = \sqrt{ga}$ ஆகையால் $\sqrt{ga} = \beta\omega \Rightarrow \beta = \frac{\sqrt{ga}}{\omega}$ (5)

t யைக் குறித்து மறுபடியும் வகையிடும்போது $\ddot{x} = -\alpha\omega^2\cos\omega t + \beta\omega^2\sin\omega t$

$= -\omega^2(\alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t)$

$= -\omega^2(x + \frac{a}{4})$ (5)

50

---

(1) இலிருந்து, $\omega^2 = \frac{2g}{a} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2g}{a}}$ (5)

$\therefore \alpha = \frac{a}{4}$, $\beta = \sqrt{ga}\,\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2g}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$ (5)

10

உயர்ந்தபட்ச நீட்சியில் $\dot{x} = 0$ ஆகையால் (10)

(3) இலிருந்து, $\alpha\sin\omega t = \beta\cos\omega t$

$\Rightarrow \tan\omega t = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{a/\sqrt{2}}{a/4} = 2\sqrt{2}$ (5)

(2) இலிருந்து, $x + \frac{a}{4} = \frac{a}{4}\frac{1}{3} + \frac{a}{\sqrt{2}}\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{a}{12}(1+8) = \frac{3a}{4}$

$\Rightarrow \quad x = \frac{a}{2}$ (5)

20

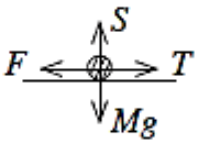
$\therefore$ உயர்ந்தபட்ச நீட்சி $\frac{a}{2}$ ஆகும்.

---

www.lkou.lk

உயர்ந்தபட்ச இழுவை $= \frac{2mg}{a}\frac{a}{2} = mg$ (5)

துணிக்கை A யின் நாப்பத்திற்கு



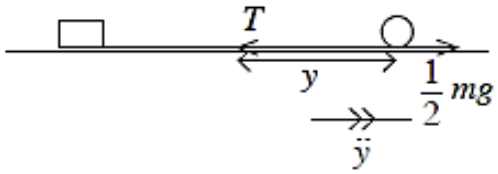
$S = Mg$, $T = F$

$\frac{F}{S} \le \frac{1}{2}$ ஆகையால், $\frac{mg}{Mg} \le \frac{1}{2}$ (5)

(10)

$M \ge 2m$

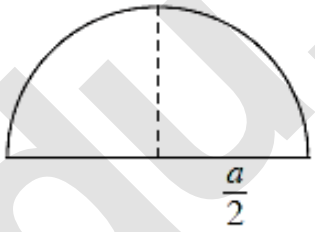
20



$-T + \frac{1}{2}mg = m\ddot{y}$ (5)

$-\frac{2mg}{a}y + \frac{mg}{2} = m\ddot{y}$

$\ddot{y} = -\frac{2g}{a}\left(y - \frac{a}{4}\right)$ (5)



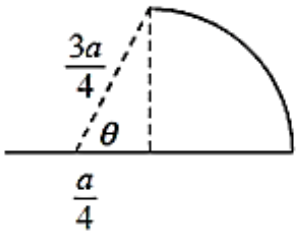
10

அமைவு மையம் $= \frac{a}{4}$ (5)

கோண வேகம் $= \sqrt{\frac{2g}{a}}$ (5)

எளிய இசை இயக்கத்தை வட்ட இயக்கம் சார்பாக கருதினால் :

மீள் வருவதற்கு எடுத்த காலம் $= \pi\sqrt{\frac{a}{2g}}$ (5)



உயர் இழுவைக்கு எடுத்த காலம்

$= \frac{\theta}{\omega} = \sqrt{\frac{a}{2g}}\cos^{-1}\frac{1}{3}$ (5)

$\therefore$ மொத்த நேரம் $= \sqrt{\frac{a}{2g}}\cos^{-1}\frac{1}{3} + \pi\sqrt{\frac{a}{2g}} = \left[\pi + \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right]\sqrt{\frac{a}{2g}}$ (5)

மீள் இயக்கத்திற்கு $\dot{y} = \frac{a}{4}\left(-\sqrt{\frac{2g}{a}}\right)\sin\sqrt{\frac{2g}{a}}\,t$ (5)

$t = \pi\sqrt{\frac{a}{2g}}$ ஆகும்போது $\therefore \sqrt{\frac{2g}{a}}\,t = \pi$

$\therefore \dot{y} = 0$ (5)

$\therefore$ துணிக்கை B யினது ஆரம்பப் புள்ளிக்கு வருவதுடன் அது நிலையான ஒய்வுக்கு வரும். (5)

www.ikoo.lk

மாற்று வழி : துணிக்கை B யின் இயக்கத்திற்கு :

துணிக்கை B யானது உயர் இழுவைக்கு வருவதற்கு எடுக்கும் நேரம் t_0.

$\tan \omega t = 2\sqrt{2}$, ஆகும்போது $\cos \omega t = \frac{1}{3}$ ஆகும். (5)

$$\therefore \cos \omega t_0 = \frac{1}{3} \qquad \therefore \quad \omega t_0 = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$t_0 = \frac{1}{\omega}\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \sqrt{\frac{a}{2g}}\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \qquad (5)$$

துணிக்கை B யின் மீள்வரும் இயக்கத்திற்கு :

ஆரம்பப் புள்ளிக்கு வருவதற்கு எடுத்த நேரம் t_1 எனின்,

$y = 0$ ஆகும்போது. (5)

(5)

$$\therefore \cos\sqrt{\frac{2g}{a}}\, t_1 = -1 \qquad \therefore \quad \sqrt{\frac{2g}{a}}\, t_1 = \pi \quad \Rightarrow \quad t_1 = \sqrt{\frac{a}{2g}}\,\pi$$

∴ துணிக்கை B யானது ஆரம்பப் புள்ளிக்கு வருவதற்கு எடுத்த நேரம்

$$= t_0 + t_1$$

$$= \sqrt{\frac{a}{2g}}\left[\pi + \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right] \qquad (5)$$

$t_1 = \sqrt{\frac{a}{2g}}\,\pi$ is $\dot{y}$ ஆகும்போதான வேகம்,

$$\dot{y} = -\frac{a}{4}\sqrt{\frac{2g}{a}}\sin\sqrt{\frac{2g}{a}}\, t_1 \qquad (5)$$

$$= -\frac{a}{4}\sqrt{\frac{2g}{a}}\sin\sqrt{\frac{2g}{a}}\sqrt{\frac{a}{2g}}\,\pi = 0 \qquad (5)$$

∴ துணிக்கை B யானது நிச்சயமாக நிரந்தர ஒய்வுக்கு ஆரம்ப புள்ளியில் வரும் (5) [40]

28. மீள்தன்மை மட்டு $3mg$ ஐயும் இயற்கை நீளம் $3\,l$ ஐயும் உடைய ஓர் இலேசான, ஒப்பமான மீள்தன்மை இழை AB யின் ஒரு நுனி A ஆனது ஒரு கிடைச் சீலிங்கின் மீது ஒரு புள்ளியுடன் விறைப்பாக இணைக்கப்பட்டு, இழையின் மற்றைய நுனி B யிலிருந்து திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. துணிக்கையின் இயக்கத்திற்குத் தடை ஏற்படாத அளவிற்குச் சீலிங்கு உயரமானதெனக் கொள்க.

i. A யிலிருந்து துணிக்கையின் நாப்பத் தானத்திற்கு உள்ள நிலைக்குத்துத் தூரத்தைக் காண்க. இப்போது திணிவு m ஐ உடைய ஒரு சிறிய வளையத்தை A யிலே ஓய்வில் வைத்து அதனூடாக இழையை அனுப்பி வளையம் விடுவிக்கப்படுகின்றது. வளையம் இழை வழியே கீழ்நோக்கி இயங்குகின்றது.

ii. வளையம் துணிக்கையுடன் மோதுவதற்குச் சற்று முன்னர் அதன் வேகம் $2\sqrt{2gl}$ எனக் காட்டுக.

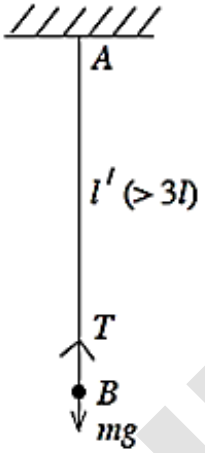
iii. வளையம் துணிக்கையுடன் மோதி ஒரு தனிப் பொருளாக அமையுமெனின், அச்சேர்த்திப் பொருளின் தொடக்க வேகம் $\sqrt{2gl}$ எனக் காட்டுக.

iv. சேர்த்திப் பொருள் ஓர் எளிய இசை இயக்கத்துடன் இயங்குகின்றதெனக் காட்டி, அதன் கோண வேகத்தையும் அலைவுக் காலத்தையும் காண்க.

v. சேர்த்திப் பொருளின் எளிய இசை இயக்கத்திற்குத் தடையாக அமையாமல் இருப்பதற்குச் சீலிங்கின் குறைந்தபட்ச உயரம் $(5+\sqrt{5})l$ ஆக இருக்க வேண்டும் எனக் காட்டுக.

www.kdu.lk

. இழை AB யின் இயற்கை நீளம் $3l$; மீள்தன்மை மட்டு $3mg$



நாப்பத் தானத்தில் $AB = l'(l' > 3l)$ எனக் கொள்வோம்.

(i) துணிக்கையின் நாப்பத்தைக் கருதும்போது,

$T = mg$ (10)

$3mg.\dfrac{(l'-3l)}{3l} = mg \quad \therefore \quad l'-3l = l$ (10)

$l' = 4l$

∴ நாப்பத் தானத்தில் A யிலிருந்து உள்ள நிலைக்குத்துத் தூரம் $= 4l$ (10) [30]

(ii) வளையத்திற்குச் சக்திக் காப்பு விதியிலிருந்து

$\frac{1}{2}\,m\,0 + mg.4l = \frac{1}{2}\,mu^2 + 0$ (10)

$\Rightarrow u^2 = 8gl$ (5)

$\Rightarrow u = 2\sqrt{2gl}$ [15]

[புவியீர்ப்பின் கீழ் வளையத்தின் இயக்கத்தைக் கருதும்போதும் இப்பேறு கிடைக்கின்றது.]

(iii) வளையமும் துணிக்கையும் மோதுவதைக் கருதுவோம்.

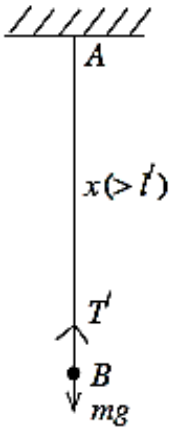
மோதுமுன்னர்	மோதிய பின்னர்
$m\circ \downarrow u$	$2m \circledcirc \downarrow u'$
$m\bullet \downarrow u$	

↓ உந்தக் காப்பு விதியைப் பிரயோகிக்கும்போது,

$2mu' = mu + 0$ (10)

$\Rightarrow u' = \frac{1}{2}\,u = \sqrt{2gl}$ (5) [15]

(iv) பின்னர் நடைபெறும் இயக்கத்தில் சேர்த்திப் பொருள் A யிலிருந்து நிலைக்குத்துத் தூரம் x கீழே இருக்கும் ஒரு சந்தர்ப்பத்தைக் கருதுவோம்.



$x > l'$ ஆகும். சேர்த்திப் பொருளுக்கு ↓ $F = ma$ ஐப் பிரயோகிக்கும்போது

$2mg - T' = 2m\ddot{x}$ (10)

$2m\ddot{x} = 2mg - 3mg\,\dfrac{(x-3l)}{3l}$

$\ddot{x} = g - \dfrac{g}{2l}\,(x-3l) = -\dfrac{g}{2l}\,(x-5l)$ (10)

இது $\ddot{y} = -\omega^2 y$ வடிவத்தை எடுக்கின்றது. $\dfrac{g}{2l} > 0$ ஆகையால், (10)

இங்கு $\omega^2 = \dfrac{g}{2l}$, $y = x - 5l$

∴ சேர்த்திப் பொருளின் இயக்கம் எளிய இசை இயக்கமாக இருக்கும் அதே வேளை கோண வேகம் $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{2l}}$ ஆகும். (10)

அலைவுக் காலம் $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{2l}}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{2l}{g}}$ (10) [50]

www.ikdu.lk

(v) சேர்த்திப் பொருளின் எளிய இசை இயக்கத்தில் அலைவு மையம் A யிலிருந்து $5l$ நிலைக்குத்துத் தூரத்தில் உள்ளது. (10)

அதன் வீச்சம் a எனின்,

$v^2 = \omega^2 (a^2 - y^2)$ ஐப் பிரயோகிக்கும்போது,

$v^2 = \frac{g}{2l} [a^2 - (x - 5l)^2]$ ஆகும். (10)

$x > l' = 4l$ ஆகும்போது $v = \sqrt{2gl}$ ஆகையால்,

$$2gl = \frac{g}{2l} [a^2 - (4l - 5l)^2]$$

$$= \frac{g}{2l} [a^2 - l^2]$$

$\therefore\ 4l^2 = a^2 - l^2$

$\Rightarrow a = \sqrt{5}\, l$ (10)

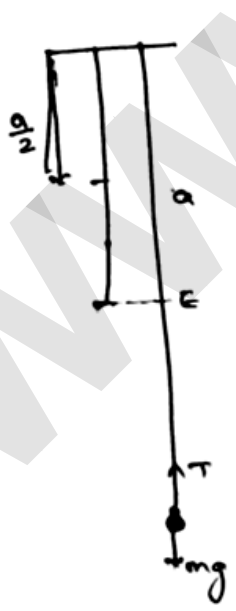
$\therefore$ இயக்கத்திற்குத் தடை இல்லாதிருப்பதற்குச் சீலிங்கின் குறைந்தபட்ச உயரம் $5l + a$, அதாவது $(5+\sqrt{5})\, l$ ஆக இருத்தல் வேண்டும். (10) [40]

29. a இயற்கை நீளமும், mg மீள்தன்மை மட்டையும் உடைய ஓர் இலேசான இழையொன்றில் ஒரு முனை நிலைப்படுத்தப்பட்டு (a) மறுமுனையில் ஓர் m திணிவுடைய துணிக்கை இணைக்கப்பட்டுள்ளது. ஆரம்பத்தில் O வின் கீழ் $\frac{a}{2}$ தூரத்தில் துணிக்கை வைத்திருக்கப்பட்டு மெதுவாக விடப்படுகின்றது. பின்னிகமும் இயக்கத்தில் O வின் கீழ் துணிக்கை x தூரத்தில் உள்ளபோது $\ddot{x} + \frac{g}{a}(x - 2a)$ ஆல் தரப்படும் எனக் காட்டுக.

$x - 2a = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ என கொண்டு A,B யின் பெறுமானங்களினைக் காண்க.

இங்கு $\omega\sqrt{\frac{g}{a}}$

$x = 2a$ ஆக இருக்கையில் துணிக்கையானது கிடைமேசையொன்றினை மோதுகின்றது. துணிக்கைக்கும் மேசைக்கும் இடையிலான மீளமைவுக்குணகம் e ஆகும். ஆயின் துணிக்கை மேசையினை மோதும், பின்னதைக்கும் வேகங்களினை காண்க.



O வின் கீழ் x தூரத்தில் துணிக்கை

உள்ளபோது, $\uparrow T = \frac{mg}{a}(x-a)$

$\downarrow F = ma$

$mg - \frac{mg}{a}(x-a) = m\ddot{x}$

$\ddot{x} + \frac{g}{a}(x-2a) = 0$ —①

$x - 2a = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ —②

$\dot{x} = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$ —③

$\ddot{x} = -A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t$

$\ddot{x} = -\omega^2(x-2a)$, $\omega = \sqrt{\frac{g}{a}}$

இதை இழுப்போது துணிக்கையின் வேகம் v ஆயின்

$\downarrow v^2 = u^2 + 2as$ உபயோகிக்க

$v^2 = ga$ $(s = \frac{a}{2})$

$t=0$ இல் $x=a$, $\dot{x}=\sqrt{3ga}$

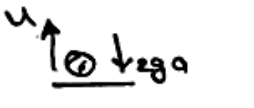
② ⇒ $A=-a$, ③ ⇒ $B=a$

$\therefore x = 2a - a\cos\omega t + a\sin\omega t$ — ④

$\dot{x} = a\omega\sin\omega t + a\omega\cos\omega t = \sqrt{3ga}\,|\sin\omega t + \cos\omega t|$ — ⑤

$x=2a$, $t=t$, ④ இல் இடல்,

$t_1 = \frac{\pi}{4\omega}$ ⑤ இலிருந்து $\dot{x} = \sqrt{2ga}$



$\frac{-u}{\sqrt{2ga}} = -e$ ∴ $u = e\sqrt{2ga}$ //

30. திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P ஆனது இயற்கை நீளம் a உம் மீள்தன்மை மட்டு mg ஆகவும் உள்ள ஓர் இழையின் ஒரு நுனியுடன் இணைக்கபட்டு இழையின் மற்ற முனை ஓர் உயரத்தில் உள்ள கிடையான சீலிங்கின் ஒரு நிலைத்த புள்ளி O உடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. துணிக்கை P ஆனது O இற்கு அருகே பிடிக்கப்பட்டு நிலைக்குத்தாக கீழ் நோக்கி V வேகத்துடன் எறியப்படுகின்றது. O இல் இருந்து துணிக்கை x தூரத்தில் $(x > a)$ உள்ள போது

i. $x^2 = v^2 + 2gx - \frac{g}{a}(x-a)^2$ எனக் காட்டுக.

ii. துணிக்கை O வில் இருந்து $5a$ ஆழத்தில் கணநிலை ஓய்வுக்கு வரும் எனில் Vஐ a, g சார்பாக தருக.

iii. $x = a$ ஆக துணிக்கையின் வேகத்தை a, g இல் காண்க.

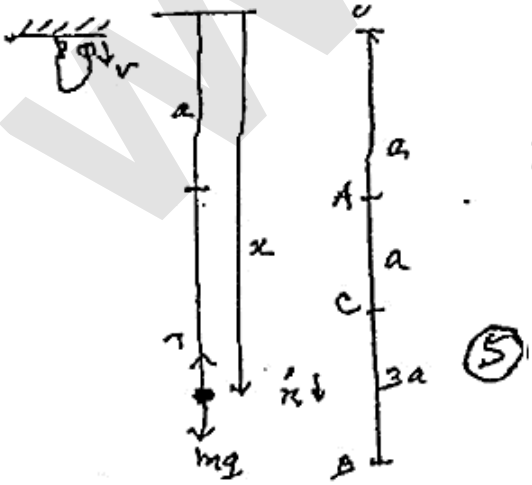
iv. $x > a$ ஆக துணிக்கை ஆனது $\ddot{x} = \frac{-g}{a}(x-2a)$ என்னும் எளிமை இசை இயக்க சமன்பாட்டை திருப்தி ஆக்கும் எனக் காட்டுக.

v. சமன்பாடு (iv) தீர்வானது $x = 2a + A\cos\omega t + B\sin\omega t$ என்னும் வடிவில் அமையின; A, B, ω ஐக் காண்க. (இங்கு $x = a$ ஆக $t = 0$ ஆகும்.

vi. இதில் இருந்து எளிமை இசை இயக்கத்தில் அலைவு மையம் வீச்சத்தைக் காண்க.

vii. துணிக்கை மீண்டும் சீலீங்கை மோத எடுக்கும் நேரம் யாது?

viii. துணிக்கைக்கும் சீலிங்கிற்குமான மீளமைவுக் குணகம் ½ எனில் துணிக்கை இரண்டாவது தடைவ O இற்கு கீழே எவ்வளவு ஆழம் செல்லும்.



(5)

Conservation of energy (20)

$\frac{1}{2}mv^2 + 0 + 0 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgx + \frac{1}{2}\frac{mg}{a}(x-a)^2$

$\dot{x}^2 = v^2 + 2gx - \frac{g}{a}(x-a)^2$ (5)

$x = 5a$, $\dot{x} = 0$

$v^2 + 10ag - 16ag = 0$

$v = \sqrt{6ag}$ (5)

$x = a, \ \dot{x} = V_0$ (10)

$V_0^2 = 8ag \Rightarrow V_0 = 2\sqrt{2ag}$ (5)

$\dot{x}^2 = V^2 + 2gx - \frac{g}{a}(x-a)^2$

$2\dot{x}\ddot{x} = 0 + 2g\dot{x} - \frac{g}{a} \cdot 2(x-a)\cdot\dot{x}$

$\ddot{x} = g - \frac{g}{a}(x-a)$ (5)

$\ddot{x} = -\frac{g}{a}(x-2a)$

$x = 2a + \alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t$

$\dot{x} = -\alpha\omega\sin\omega t + \beta\omega\cos\omega t$ (5)

$\ddot{x} = -\alpha\omega^2\cos\omega t - \beta\omega^2\sin\omega t$ (5)

$\therefore \ddot{x} = -\omega^2(x-2a)$ (5)

$\omega^2 = g/a.$ (5)

$t=0, \ x=a, \ \dot{x} = 2\sqrt{2ag}$

$\alpha = -a$ (5)

$\beta\omega = 2\sqrt{2ag}$

$\beta = 2\sqrt{2}a$ (5)

$\therefore x = 2a - a\cos\omega t + 2\sqrt{2}a\sin\omega t$ (5)

(i) $\ddot{x} = 0 \Rightarrow x = 2a$. (centre) (5)

$\dot{x} = 0 \Rightarrow x = 5a$

$\therefore$ amplitude $= 5a - 2a = 3a$ (5)

$x = 2a - 3a\left[\frac{1}{3}\cos\omega t - \frac{2\sqrt{2}}{3}\sin\omega t\right]$ (10)

$x = 2a - 3a\cos(\omega t + \alpha)$, $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ (5)

$x = 5a, \ t = t_1 \quad (t_{AB})$

$5a = 2a - 3a\cos(\omega t_1 + \alpha)$ (5)

$\cos(\omega t_1 + \alpha) = -1 = \cos\pi$ (10)

$\omega t_1 + \alpha = \pi$

$t_1 = \frac{1}{\omega}(\pi - \alpha) = \sqrt{\frac{a}{g}}\left[\pi - \cos^{-1}\frac{1}{3}\right]$

(10)

www.ikdu.lk

$t_{OA} = t_2$ தர $v = u + at$

$2\sqrt{2ag} = \sqrt{bg} + gt_2$

$t_2 = (2\sqrt{2} - \sqrt{1})\sqrt{\frac{a}{g}}$ (10)

31. m திணிவுள்ள துணிகையானது இயல்பு நீளம் l உடைய மீள்தன்மை இழையின் ஒரு நுனிக்கு இணைக்கப்பட்டு மறுமுனை நிலைத்த புள்ளிக்கு இணைக்கப்பட்டு தொங்கவிடப்படுகிறது. சமநிலையில் இழை நீட்சி $\frac{l}{2}$ ஆகும். மீள்தன்மை மட்டின் பெறுமானத்தைக் காண்க

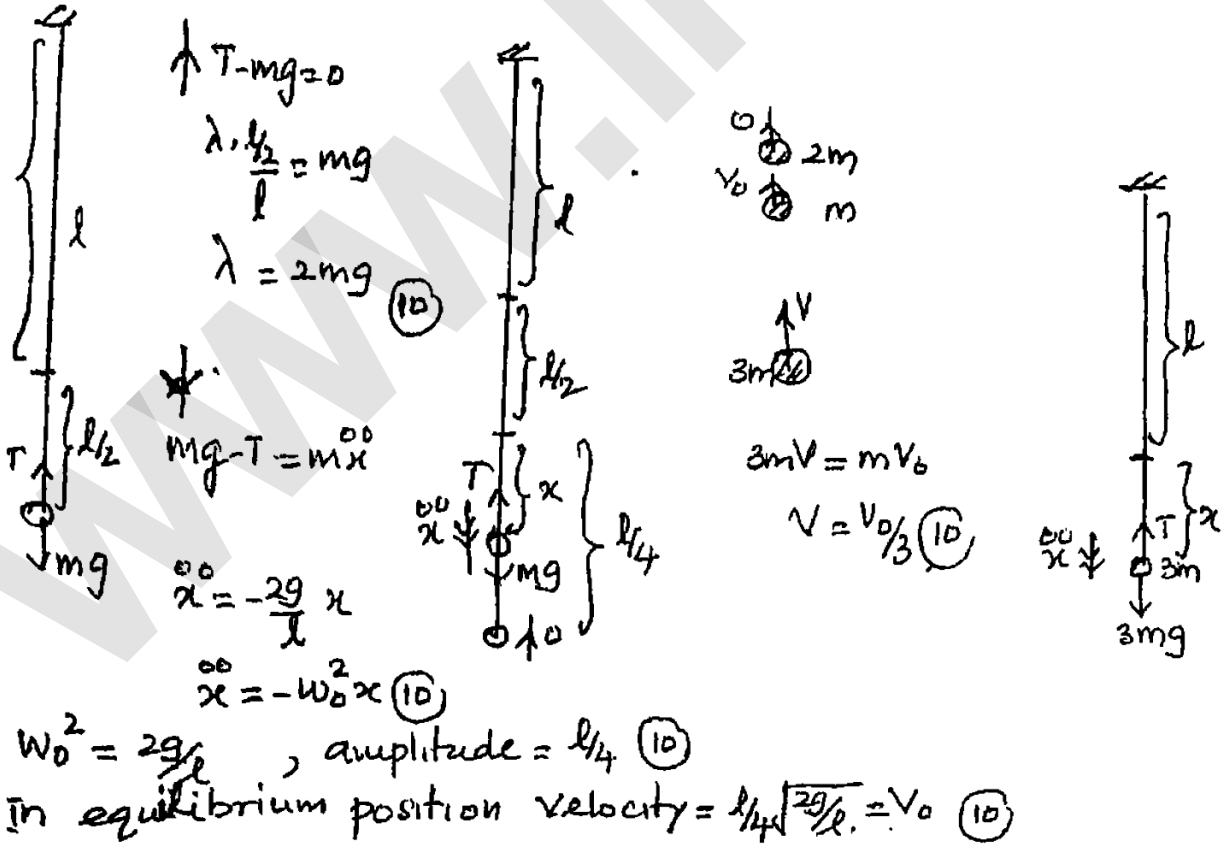
துணிக்கை மேலும் $\frac{l}{4}$ தூரம் கீழே இழுக்கப்பட்டு விடப்படுகிறது. அது அதியுயர் வேகத்தை அடையும் போது ஓய்விலுள்ள $2m$ திணிவுள்ள மீள்தன்மையற்ற துணிக்கையைக் காவுகின்றது. சேர்த்தித் துணிக்கையின் ஆரம்ப வேகத்தைக் காண்க. இழையின் நீட்சி x ஆகும் போது இயக்க சமன்பாடு $\ddot{x} = \frac{-2g}{3l}(x - \frac{3l}{2})$ எனக் காட்டுக.

$x = \frac{3l}{2} + A\cos\omega t + B\sin\omega t$ என எடுத்து, மாறிலிகள் A, B ஐக் காண்க.

இங்கு $\omega\sqrt{\frac{2g}{3l}}$, t ஆனது சேர்த்தித் திணிவின் இயக்க ஆரம்பத்திலிருந்து அளக்கப்படுகிறது.

கண ஓய்வை அடைய எடுக்கும் நேரம் $\sqrt{\frac{3l}{2l}}\tan^{-1}(4\sqrt{3})$ எனக் காட்டுக.

சேர்த்தித் துணிக்கை அடைந்த அதியுயரம் $\left(\frac{7}{4\sqrt{3}} - 1\right)l$ எனவும் காட்டுக.



www.ikdu.lk

$P = mf$

$3mg - T = 3m\ddot{x}$

$3mg - \frac{2mg}{l}\cdot x = 3m\ddot{x}$

$\ddot{x} = -\frac{2g}{3l}(x - 3l/2)$

$\ddot{x} = -\omega^2(x - 3l/2)$ (20)

$\omega^2 = \frac{2g}{3l}$.

$x = 3l/2 + A\cos\omega t + B\sin\omega t$

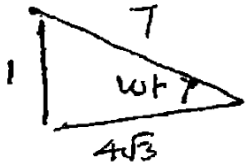
$\dot{x} = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$ (10)

$t = 0,\ x = l/2\ \ \dot{x} = -\frac{V_0}{3}$.

$\Rightarrow A = -l \quad B = -\frac{1}{4\sqrt{3}}$ (10) (10)

When $\dot{x} = 0 \Rightarrow \tan\omega t = B/A = \frac{1}{4\sqrt{3}}$

$t = \sqrt{\frac{3l}{2g}}\tan^{-1}(1/4\sqrt{3})$ (20)



$\sin\omega t = 1/7$

$\cos\omega t = \frac{4\sqrt{3}}{7}$ (10)

maximum height above the equilibrium position

$= l/2 - \left[3l/2 - l\frac{4\sqrt{3}}{7} - \frac{l}{4\sqrt{3}}\frac{1}{7}\right]$ (10)

$= l/2 - \left[\frac{3l}{2} - \frac{7l}{4\sqrt{3}}\right]$

$= \left[\frac{7}{4\sqrt{3}} - 1\right]l$ (10)

150

32. இயற்கை நீளம் a யை உடைய மீள்தன்மை இழையின் ஒரு நுனி சீலிங்கின் நிலைத்த புள்ளி O விற்கு இணைக்கப்பட்டு மற்றைய நுனியில் திணிவு m கட்டித் தொங்கவிடப்பட்ட போது சமநிலையில் நீட்சி b ஆகும். திணிவு $m + m'$ இணைக்கப்பட்டு சமநிலையில் உள்ளபோது நீட்சி $b + c$ ஆகும். திணிவு m' மெதுவாக கழட்டி விடப்படுகிறது.

i. திணிவு m ஆனது $\ddot{x} = \frac{-g}{b}x$ என்னும் இயக்கச் சமன்பாட்டை திருப்தியாக்கும் எனக் காட்டுக, இற்கு x ஆனது திணிவு m இணைக்கப்பட்டு சமநிலையில் உள்ள புள்ளியில் இருந்து துணிக்கைக்கான தூரம் ஆகும்.

ii. $x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ எனத் தரப்படின் A,B, ω ஐக் காண்க.

iii. (ii) இலிருந்து $\frac{\dot{x}^2}{w^2} + x^2 = C^2$ எனக் காட்டுக.

iv. இழையின் இழுவை பூச்சியம் ஆகும். கணத்தில் துணிக்கையின் வேகம் V_0 ஐக் காண்க.

v. $b < c < a + b$ எனின் துணிக்கை மீண்டும் அதிதாழ் புள்ளியை அடைய எடுக்கும் நேரத்தைக் காண்க.

www.lkou.lk

(i) $mg = \frac{\lambda b}{a}$ .... (1) (5)

$mg - T = m\ddot{x}$ .... (2) (5)

$T = \frac{\lambda(b+x)}{a}$ .... (3) (5)

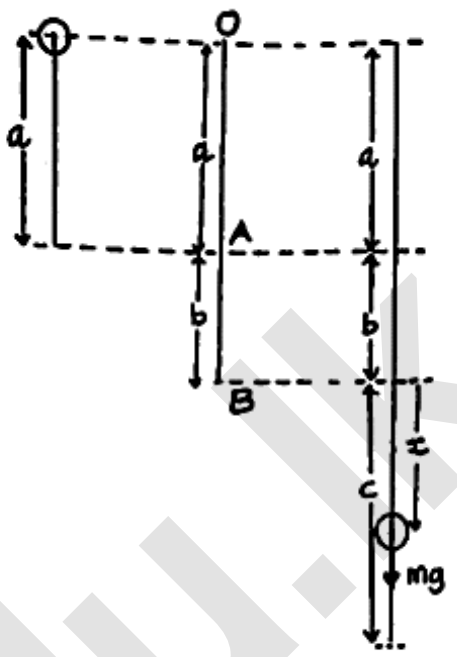
$mg - \frac{\lambda(b+x)}{a} = m\ddot{x}$ (5)

$mg - \frac{\lambda b}{a} - \frac{\lambda x}{a} = m\ddot{x}$

$mg - mg - \frac{\lambda x}{a} = m\ddot{x}$ (5)

$-\frac{mg}{b}x = m\ddot{x}$ (5)

$\ddot{x} = -\frac{g}{b}x$



30

(ii) $x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$

$\dot{x} = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$ (5)

$\ddot{x} = -A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t$ (5)

$= -\omega^2 x$ (5)

$-\frac{g}{b}x = -\omega^2 x$ (5)

$\omega^2 = \frac{g}{b}$

$\omega = \sqrt{\frac{g}{b}}$ (5)

At $t=0$, $x=c$ and $\dot{x}=0$ (5)

$c = A + 0$

$c = A$ (5)

$0 = 0 + B$

$B = 0$ (5)

$\therefore x = c\cos\sqrt{\frac{g}{b}}t$ (5)

45

(iii) $x = c\cos\omega t$ .... (1) (5)

$\dot{x} = -c\omega\sin\omega t$ ..... (2) (5)

$x^2 = c^2\cos^2\omega t$ (5)

$\frac{\dot{x}^2}{\omega^2} = c^2\sin^2\omega t$ (5)

$\Rightarrow \frac{\dot{x}^2}{\omega^2} + x^2 = c^2$

20

(iv) For $x = -b$

$\dot{x}^2 = v_0^2$ (5)

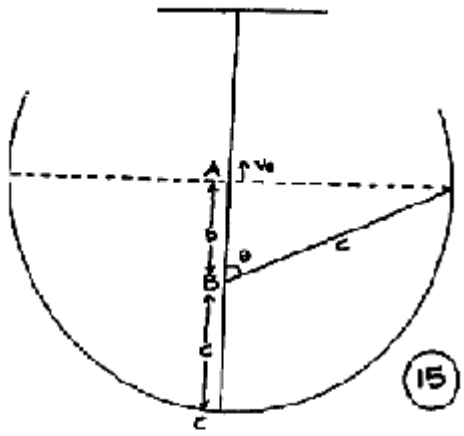
$v_0^2 = \omega^2(c^2 - b^2)$ (5)

$v_0 = \omega\sqrt{c^2 - b^2}$ (5)

15

www.ikdu.lk

(v)



15

$\cos\theta = \frac{b}{c}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{b}{c}\right)$ (5)

Time from C to A :

$t_1 = \frac{\pi-\theta}{\omega}$ (5)

Time from A to pant of equilibri um :

$t_2 = \frac{v_0}{g}$ (5)

Time to reach C again :

$T = 2(t_1+t_2)$ (5)

$= 2\left(\frac{\pi-\theta}{\omega} + \frac{v_0}{g}\right)$ (5)

40

33. திணிவு m ஐ உடைய துணிக்கை ஒன்று இயற்கை நீளம் l ஐயும் மட்டு λ வையும் உடைய ஓர் இலேசான மீள்தன்மை இழையின் நுனி ஒன்றுடன் தொகுக்கப்பட்டுள்ளது. இழையின் மற்றைய நுனி கிடையுடன் கோணம் $\sin^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$ இற்கு சாய்ந்த ஒப்பமான தளம் ஒன்றின் மீது உள்ள ஒரு நிலைத்த புள்ளி A யுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இழை அதியுயர் சரிவுக் கோடு ஒன்றின் வழியே ஈர்க்கப்பட்டிருக்கத் தளத்தின் மீது $AC = l + c$ ஆன புள்ளி C யில் துணிக்கை நாப்பத்தில் (சமநிலையில்) ஓய்வில் இருக்கின்றது. $\lambda = \frac{mgl}{4c}$ எனக் காட்டுக.

இப்போது இழை $2c$ எனும் மேலதிக அளவினால் ஈர்க்கப்பட்டு $AD = l + 3c$ ஆக உள்ள புள்ளி D யில் ஓய்வில் இருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றது. $t = t$ இல் இழையின் நீளம் $l + c + x$ ஆக இருக்கும் போது

i. சக்தி காப்பு விதியைப் பயன்படுத்தி $\dot{x}$ ஆனது $4\dot{x}^2 + \frac{g}{c}x^2 - 4gc = 0$. இனால் தரப்படும் எனக் காட்டுக.

ii. இதிலிருந்து $\ddot{x} = \frac{-g}{4c}x$. எனக் காட்டுக.

iii. $x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ என எடுத்து A, B, ω ஐக் காண்க.

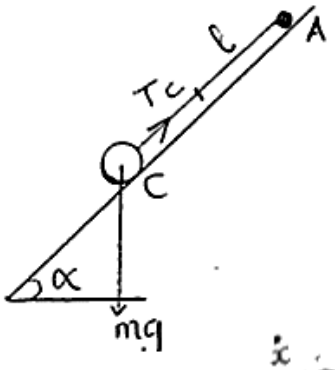
iv. இதிலிருந்து $\frac{4\pi}{3}\sqrt{\frac{c}{g}}$ நேரத்தின் பின் இழை தளரும் எனக்காட்டி அக்கணத்தில் வேகத்தைக் காட்டுக.

$c = \frac{2l}{3}$ எனில் தொடரும் இயக்கத்தில் துணிக்கை மட்டுமட்டாக A ஐ அடையும் எனக் காட்டுக.

www.kdu.lk

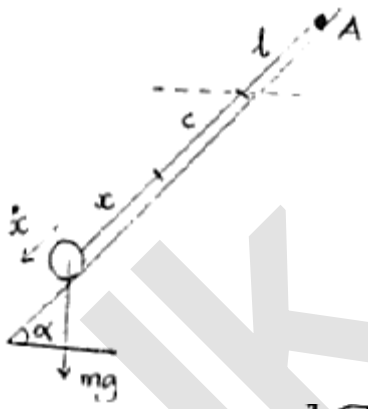
For the equilibrium,

$$T = mg\sin\alpha \quad (10)$$



$$\frac{\lambda \cdot c}{l} = mg\,\frac{1}{4}$$

$$\lambda = \frac{lmg}{4c} \quad (10)$$



Principle of conservation of energy,

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda\cdot(3c)^2}{l} - mg\cdot 3c\sin\alpha = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mg(c+x)\sin\alpha + \frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda\cdot(c+x)^2}{l} \quad (25)$$

$$\frac{9lmgc^2}{24cl} - mg\cdot 3c\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mg(c+x)\cdot\frac{1}{4} + \frac{mgl(c+x)^2}{2\cdot 4cl} \quad (10)$$

$$\Rightarrow 4\dot{x}^2 + \frac{g}{c}x^2 - 4gc = 0 \quad (10)$$

Differentiating w.r.t t; (5)

$$8\dot{x}\ddot{x} + \frac{g}{c}\cdot 2x\dot{x} = 0 \quad (10)$$

$$\ddot{x} = -\frac{g}{4c}x \quad \text{---(a)} \quad (5)$$

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

$$\dot{x} = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t \quad (5)$$

$$\ddot{x} = -A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t \quad (5)$$

$$= -\omega^2 x \quad \text{---(b)} \quad (5)$$

(a) & (b) $\Rightarrow$ $\omega^2 = \frac{g}{4c}$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{4c}} \quad (5)$$

$t=0,\ x=2c \Rightarrow A = 2c$ (10)

$t=0,\ \dot{x}=0 \Rightarrow B = 0$ (10)

$$x = 2c\cos\omega t$$

$x = -c \Rightarrow \cos\omega t = -\frac{1}{2}$

$$\omega t = \frac{2\pi}{3}$$

$$t = \frac{2\pi}{3}\cdot\frac{1}{\omega}$$

$$= \frac{4\pi}{3}\sqrt{\frac{c}{g}} \quad (10)$$

After this time the string will slack.

$$\dot{x} = -2c\cdot\omega\sin\omega t$$

$$= -2c\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{c}}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= -\sqrt{gc}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \sqrt{\frac{3gc}{4}} \quad (10)$$

www.ikdu.lk

$v^2 = u^2 + 2as$

$\nearrow \quad 0 = \frac{3gc}{4} - 2 \cdot g\sin\alpha \cdot H$

$H = \frac{3c}{2}$ If $c = \frac{2l}{3}$, $H = l$ (5)

$\therefore$ the particle will just reach A.

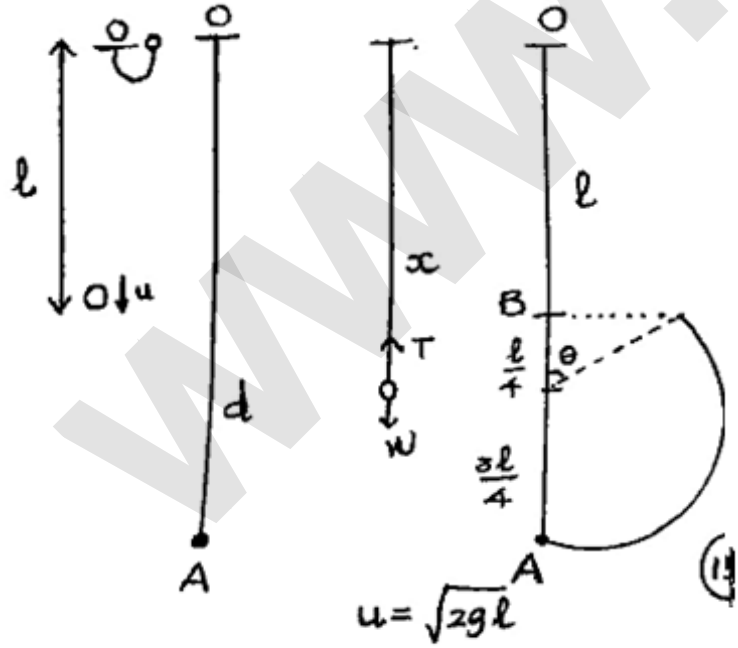
34. l இயற்கை நீளமும் $4w$ மீள்தன்மை மட்டையும் உடைய இழையின் ஒரு முனை நிலைத்த புள்ளி O இற்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளது. மறு முனையில் w நிறை பிணைக்கப்பட்டு O இல் பிடிக்கப்பட்டு விடப்படுகின்றது.

i. துணிக்கை முதன் முதலாக 2l ஆழத்தில் கணநிலை ஓய்வுக்கு வரும் எனக் காட்டுக.

ii. O இலிருந்து $x(> l)$ ஆழத்தில் துணிக்கை உள்ளபோது $\ddot{x} = -\frac{4g}{l}(x - \frac{5l}{4})$ எனக் காட்டுக.

iii. $x > l$ ஆக உள்ள போது துணிக்கை எளிமை இசை இயக்கத்தை ஆற்றும் எனக் காட்டுக.

iv. துணிக்கை முதலில் கணநிலை ஓய்வுக்கு வர எடுக்கும் நேரம் $\sqrt{\frac{l}{g}}\left[\sqrt{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{1}{3}\right]$ எனக் காட்டுக.



$u = \sqrt{2gl}$ (1)

$2(d-l)^2 = ld$ (5)

$2(d^2 + l^2 - 2ld) = ld$

$2d^2 - 5ld + 2l^2 = 0$ (5)

$(2d - l)(d - 2l) = 0$ (5)

$d = 2l, \frac{l}{2}$ (5)

$d > l \Rightarrow d = 2l$ (5)

total energy at O = total energy at

$0 + 0 + 0 = 0 - wd + \frac{1}{2}\frac{4w}{l}(d-l)^2$ (2)

www.lkdu.lk

$x > l$ (5)

$\downarrow$ $F = ma$

$$W - T = \frac{W}{g}\ddot{x} \quad (10)$$

$$W - \frac{4W}{l}(x-l) = \frac{W}{g}\ddot{x} \quad (5)$$

$$1 - \frac{4x}{l} + 4 = \frac{1}{g}\ddot{x} \quad (5)$$

$$\ddot{x} = -\frac{4g}{l}\left(x - \frac{5}{4}l\right)$$

$x - \frac{5l}{4} = y$ (say)

$\ddot{x} = \ddot{y}$ (5)

$\therefore \ddot{y} = -\frac{4g}{l}y$ (5)

(i) SHM (5)

(ii) centre $y = 0 \Rightarrow x = \frac{5l}{4}$ (5)

(iii) $x = l$, $v = \sqrt{2gl}$, $y = -\frac{l}{4}$ (5)

$$v^2 = w^2(A^2 - y^2) \quad (5)$$

$$2gl = \frac{4g}{l}\left(A^2 - \frac{l^2}{16}\right) \quad (5)$$

$$\frac{l^2}{2} = A^2 - \frac{l^2}{16}$$

$$A = \frac{3l}{4} \quad (5)$$

$O \to B$ $\quad v = u + at$

$$\sqrt{2gl} = gt_1 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2l}{g}} \quad (5)$$

$B \to A$ $\quad t_2 = \frac{\pi - \theta}{w} = \left(\pi - \cos^{-1}\frac{1}{3}\right)\sqrt{\frac{l}{4g}}$ (5)

Time taken from O to A $= t_1 + t_2$ (5)

$$= \sqrt{\frac{l}{g}}\left\{\sqrt{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1}{3}\right\} \quad (5)$$

$$= \sqrt{\frac{l}{g}}\left\{\sqrt{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{1}{3}\right\} \quad (5)$$

www.lkou.lk

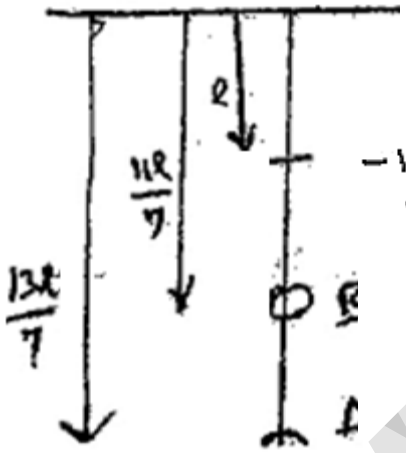
35. m திணிவு உடைய ஒரு துணிக்கை P ஆனது இயற்கை நீளம் l உடைய ஓர் இலேசான மீள்தன்மை இழையினால் ஒரு நிலைத்த புள்ளியில் இருந்து தொங்கவிடப்பட்டு சமநிலையில் தொங்குகின்றது. துணிக்கையானது இழையின் நீளம் $\frac{13l}{7}$ ஆகவுள்ள ஒரு நிலைக்கு நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கி இழுக்கப்படுகின்றது. துணிக்கை இவ் அமைவில் ஓய்வில் இருந்து விடுவிக்கப்பட்டு இழையின் நீளம் $\frac{11l}{7}$ ஆகும் போது துணிக்கை அதியுயர் உயரத்தை அடைகின்றது.

i. இழையின் மீள்தன்மை மட்டு $\frac{7}{5}mg$ எனக் காட்டுக.

ii. நேரம் t இல் இழையின் நீளம் x எனக் கொள்வோம். $\ddot{x} = -\frac{7g}{5l}\left(x - \frac{12l}{7}\right)$

iii. மேலே பெறப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வு
$x - \frac{12l}{7} = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ என்னும் வடிவில் தரப்படின், A,B,ω என்பவற்றைக் காண்க.

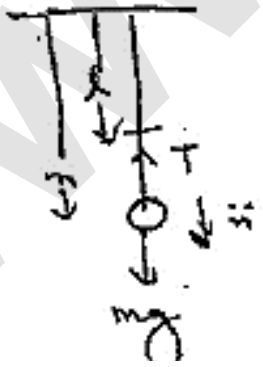
iv. மேலே (iii) உள்ள சமன்பாட்டை மாத்திரம் பயன்படுத்தி, துணிக்கை பெறக்கூடிய உயர் வேகத்தின் அரைவாசியை முதலில் அடைவதற்கு எடுக்கும் நேரத்தைக் காண்க.



Conservation of energy

$-\frac{13mgl}{7} + \frac{1}{2}\lambda\frac{\left(\frac{6l}{7}\right)^2}{l} = -\frac{11mgl}{7} + \frac{1}{2}\lambda\frac{\left(\frac{4l}{7}\right)^2}{l}$ ..(20)

$\Rightarrow \lambda = \frac{7mg}{5}$ (10)



$mg - T = m\ddot{x}$ (10)

$mg - \frac{7mg(x-l)}{5l} = m\ddot{x}$

$g - \frac{7g}{5l}(x-l) = \ddot{x}$ (10)

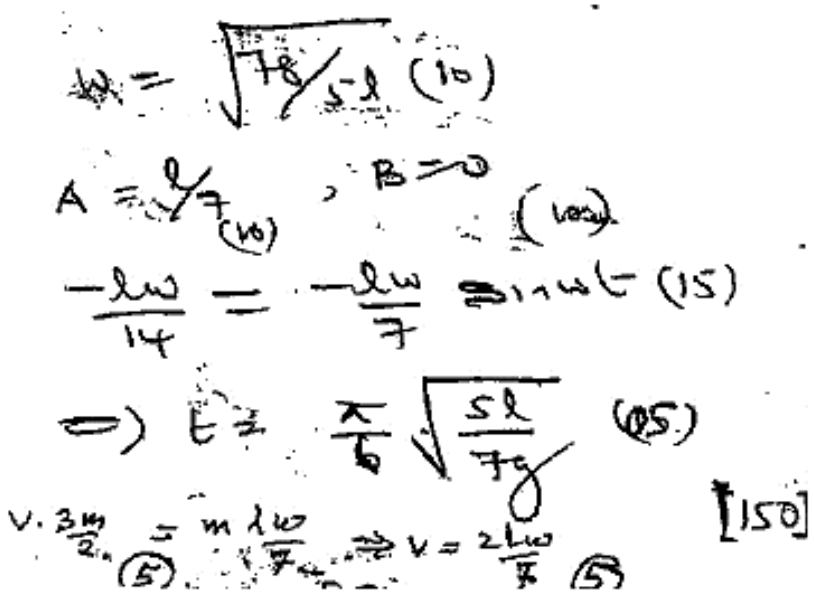
$\ddot{x} = -\frac{7g}{5l}\left(x - \frac{12l}{7}\right)$ (10)

$x - 12l/7 = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ (10)

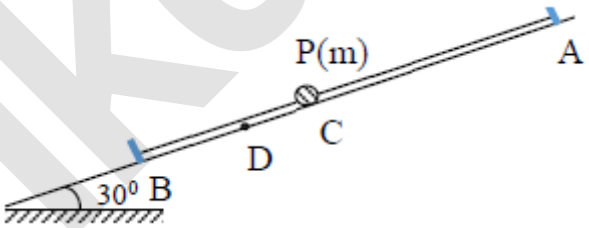
$\dot{x} = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$ (10)

$\ddot{x} = -\omega^2\left(x - 12l/7\right)$ (10)

www.ikou.lk



36. திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P ஆனது, இயற்கை நீளம், $2a$ மீள்தன்மைமட்டு $2mg$ ஐயும் இயற்கை நீளம் a மீள்தன்மைமட்டு $\frac{mg}{2}$ ஐயும் உடைய இரு இலேசான இழைகளின் இரு நுனிகளுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது.
ஒப்பமான கிடையுடன் $30°$ சாய்வுடைய சாய்தளத்தின் மேல் துணிக்கை P வைக்கப்பட்டு இழையின் சுயாதீன முனைகளில் $2a$ இயற்கை நீளமுடையதன் நுனி சாய்தளத்தில் மேலே உள்ள நிலையான புள்ளி A இற்கும், a இயற்கை நீளமுடையதன் நுனி சாய்தளத்தில் கீழே உள்ள நிலையான புள்ளி B இற்கும் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இழைகள் சாய்தளத்தின் அதியுயர் சாய்வுக்கோட்டின் வழியே இருக்க $AB = 5a$ ஆகுமாறுள்ளது. P ஆனது சாய்தளத்தில் புள்ளி C இல் சமநிலையில் இருப்பின் $AC = 3a$ எனக் காட்டுக.



இப்போது துணிக்கை P ஆனது $AD = 4a$ ஆகுமாறு சாய்தளத்திலுள்ள புள்ளி D இற்கு கொண்டுவரப்பட்டு, அதிலிருந்து மெதுவாக ஒய்விலிருந்து விடப்படுகிறது. இரு இழைகளும் இறுக்கமாக இருக்க இழை AP இன் நீளம் x ஆக இருக்கும் போது $\ddot{x} + \frac{3g}{2a}(x - 3a) = 0$ எனக் காட்டுக.

$X = x - 3a$, $\omega^2 = \frac{3g}{2a}$ ஆக இருக்க சமன்பாட்டை $\ddot{X} + \omega^2 X = 0$ எனும் வடிவில் எழுதுக.

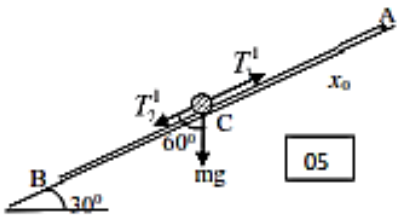
சூத்திரம் $\dot{X}^2 = \omega^2(c^2 - X^2)$ ஐக் கருத்தில் கொண்டு வீச்சம் c ஐக் காண்க.

துணிக்கை P ஆனது அதன் மிக உயர்ந்த இடமான புள்ளி E ஐ அடையும் போது AE ஐக் காண்க. P ஆனது E ஐ அடையும் கணத்தில் இழை AP வெட்டப்படுகிறது.

புதிய இயக்கத்தின் எளிமையிசை இயக்கச்சமன்பாட்டைப் பெற்று அதன் அலைவுமையம் B இல் இருக்கும் எனக்காட்டுக.

துணிக்கை P, D இல் இருந்து இயங்கத்தொடங்கி மீண்டும் D ஐ அடைய எடுக்கும் நேரம் $\sqrt{\frac{2a}{g}}\left[\frac{\pi}{\sqrt{3}} + cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right]$ எனக் காட்டுக.

www.ikdu.lk



05

Hooke's Law

$$T_1^1 = \frac{2mg(x_0-2a)}{2a} = mg\frac{mg(x_0-2a)}{a}$$ 05

$$T_2^1 = \frac{mg}{2}\frac{(4a-x_0)}{a} = \frac{mg(4a-x_0)}{2a}$$ 05

சமநிலையில் $\nearrow T_1^1 = T_2^1 + mg\cos 60$ 10

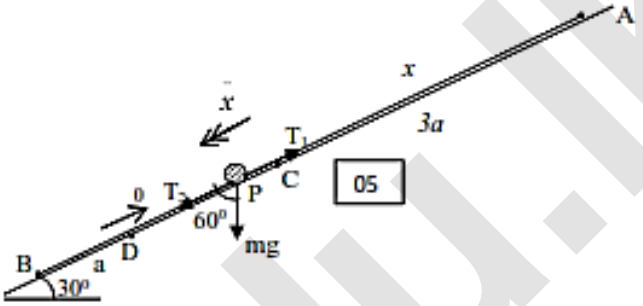
$$\Rightarrow T_1^1 - T_2^1 = \frac{mg}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{mg(x_0-2a)}{a} - \frac{mg(4a-x_0)}{2a} = \frac{mg}{2}$$

$$2(x_0-2a)-(4a-x_0) = a$$

$$3x_0 = 9a$$

$$x_0 = 3a = AC$$ 05



Hooke's Law

$$T_1 = \frac{2mg(x-2a)}{2a} = \frac{mg(x-2a)}{a}$$

$$T_2 = \frac{mg}{2}\frac{(4a-x)}{a} = \frac{mg(4a-x)}{2a}$$ 05

$$\underline{F} = m\underline{a}$$

$$\swarrow T_2 + mgCos60 - T_1 = m\ddot{x}$$ 10

$$m\ddot{x} = mg\frac{(4a-x)}{2a} - \frac{mg(x-2a)}{a} + \frac{mg}{2}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = \frac{-3g}{2a}(x-3a)$$

$$\ddot{x} + \frac{3g}{2a}(x-3a) = 0$$ 05

$\ddot{X} + \omega^2 X = 0$; இங்கு $\omega^2 = \frac{3g}{2a}$, $X = x-3a \Rightarrow \dot{x} = \dot{x} \Rightarrow \ddot{x} = \ddot{x}$ 05

$\ddot{X} = -\omega^2 X$

$\therefore S.H.M$

$X = 0$ இல் அலைவுமையம் இருக்கும் 05

$\Rightarrow x = 3a$ இல் அலைவுமையம் (C) இருக்கும்

$\dot{X}^2 = \omega^2(c^2 - X^2)$

$x = 4a$ இல் $\dot{x} = 0$ 05

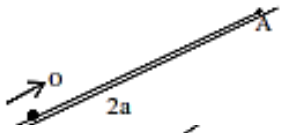
$\Rightarrow X = a$ இல் $\dot{X} = 0$

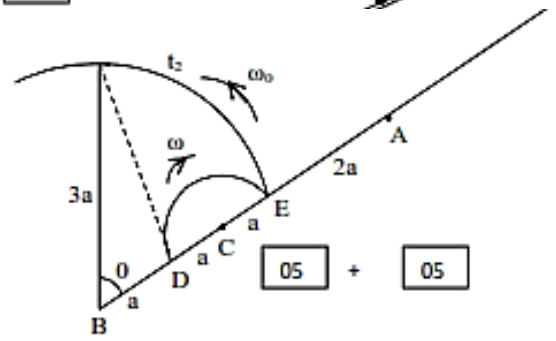
www.lkdu.lk

$(1) \Rightarrow 0 = \omega^2\left(c^2 - a^2\right)$

$c^2 - a^2 = 0 \;, \because \omega \neq 0$

$c = a$ 05





05 + 05

Law

$\frac{4a-x)}{a} = \frac{mg(4a-x)}{2a}$

$Cos60 = m\ddot{x}$ 10

$\frac{\imath-x)}{2a} + \frac{mg}{2} = m\ddot{x}$

$t_1 = \frac{\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{2a}{3g}}$ 05

$cos\theta = \frac{a}{3a} \Rightarrow \theta = cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

05

$t_2 = \frac{\theta}{\omega_0} = \sqrt{\frac{2a}{g}}\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ 05

$t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2a}{g}}\left[\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right]$ 05

$2a$

$\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0;$ இங்கு $\omega_0^2 = \frac{g}{2a}$, $y = x - 5a \Rightarrow \dot{y} = \dot{x} \Rightarrow \ddot{y} = \ddot{x}$ 05

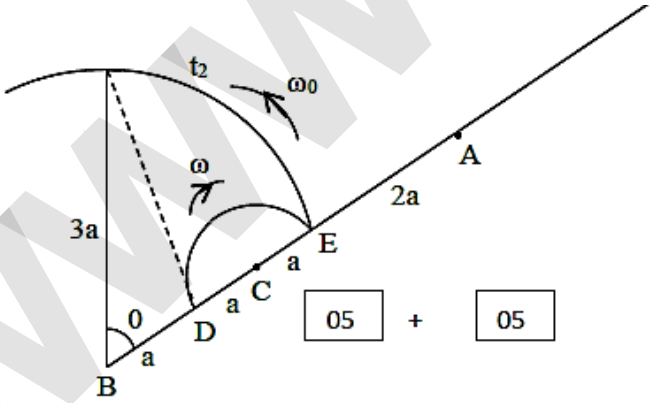
$\therefore S.H.M$

$y = 0$ இல் அலைவுமையம் இருக்கும்

$\Rightarrow x = 5a$ இல் அலைவுமையம் இருக்கும் 05

அலைவுமையம் B ஆகும்

∴ வீச்சம் = 3a 05



05 + 05

$t_1 = \frac{\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{2a}{3g}}$ 05

$cos\theta = \frac{a}{3a} \Rightarrow \theta = cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

05

$t_2 = \frac{\theta}{\omega_0} = \sqrt{\frac{2a}{g}}\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ 05

$t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2a}{g}}\left[\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right]$ 05

30

www.lkdu.lk

37. 2019/gov model/14

இயற்கை நீளம் a ஐயும் மட்டு mg ஐயும் உடைய ஓர் இலேசான மீள்தன்மை இழையின் ஒரு நுனி ஒரு நிலைத்த புள்ளி O உடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொன்றும் திணிவு m ஐ உடைய இரு சம துணிக்கைகள் இழையின் மற்றைய நுனி P உடன் ஒருமிக்க இணைக்கப்பட்டு, தொகுதி நாப்பத்தில் தொங்குகின்றது. இத்தானத்தில் இழையின் நீட்சி $2a$ எனக் காட்டுக. இப்போது துணிக்கைகளில் ஒன்று மெதுவாகப் பிரிந்து செல்லும் அதே வேளை திணிவு m ஐ உடைய எஞ்சியுள்ள துணிக்கை இழையின் நுனியுடன் இன்னும் இணைந்திருக்கையில் இயங்கத் தொடங்குகின்றது. P இன் இயக்கத்திற்குச் சமன்பாடு $\ddot{x}+\frac{g}{a}(x-2a)=0$ ஐப் பெறுக; இங்கு $x(\geq a)$ ஆனது இழையின் நீளம் ஆகும்.

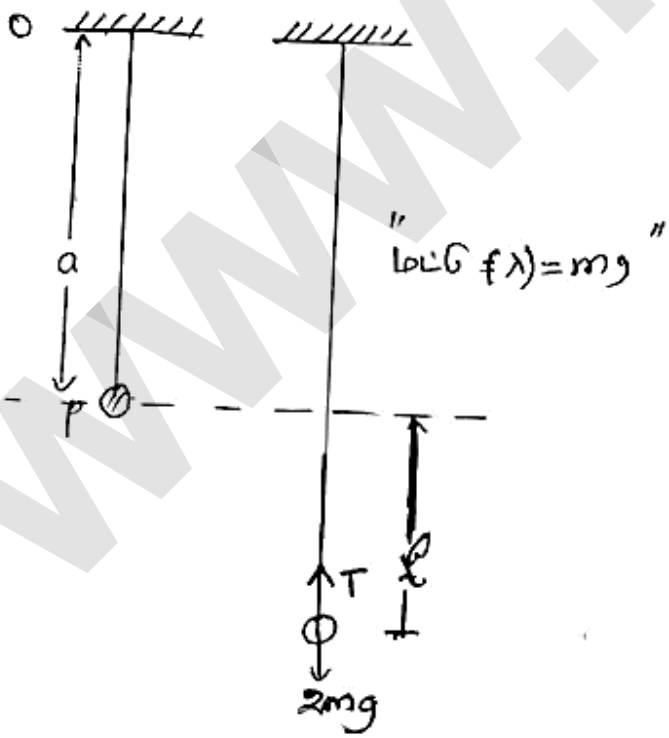
இவ்வெளிய இசை இயக்கத்தின் மையம் C ஐயும் வீச்சத்தையும் காண்க.

புள்ளி C இல் துணிக்கையின் வேகம் மூன்று மடங்காகுமாறு துணிக்கைக்கு ஒரு நிலைக்குத்துக் கணத்தாக்கு பிரயோகிக்கப்படுகின்றது. இழை இறுக்கமாக இருக்கும் வரைக்கும் இயக்கத்தின் மையம் அவ்வாறே இருக்கும் எனவும் இவ்வியக்கத்தின் வீச்சம் $3a$ எனவும் காட்டுக.

இதிலிருந்து, இழை மொத்த நேரம் $\sqrt{\frac{a}{g}}\left(\frac{\pi}{2}+\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right)$ இற்குப் பின்னர் தளர்கின்றதெனக் காட்டுக.

இழை தளரும் கணத்தில் துணிக்கையின் கதியைக் காண்க.

37 / 2019 / gov model. / 14



நீட்சி l என்க,

உறுக்கின் விசை.

$T = \frac{mg(l)}{a}$

மீள்தன்மையால்.

$T = 2mg$

$2mg = \frac{mgl}{a}$

$l = 2a$



Hook's law.

$$T_1 = \frac{mg(x-a)}{a}$$

$\downarrow F = ma.$

$$-T_1 + mg = m(\ddot{x})$$

$$-\frac{mg(x-a)}{a} + mg = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} = \frac{g}{a}(2a - x)$$

$$\ddot{x} = -\frac{g}{a}(x - 2a)$$

$$\ddot{x} + \frac{g}{a}(x-2a) = 0$$

$$\ddot{x} = -\frac{g}{a}(x-a)$$

$X = x - a$ என்க,

"w.r.to t" $\dot{X} = \dot{x}$.

"w.r.to t" $\ddot{X} = \ddot{x}$ ஆகும்.

$$\ddot{X} = -\frac{g}{a}X$$

$$\ddot{X} = -\omega^2 X \quad \therefore$$

இங்கு $\omega^2 = g/a$.

இது SHM ஆகும்.

இயக்கமையம் (C).

$$\ddot{X} = 0$$

$$X = 0$$

$$x - 2a = 0$$

$$x = 2a$$

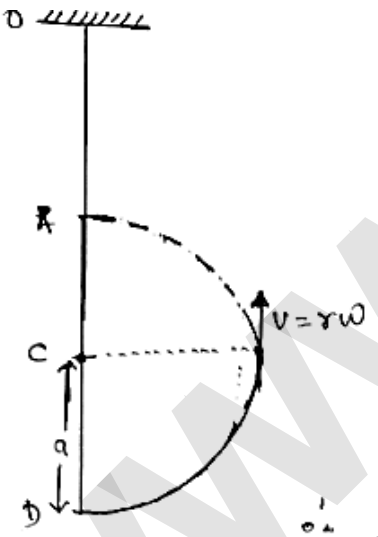
வீச்சம் காணல்

வேக்கு குட்டியமான இடம் $x = 3a$ ஆகும்.

இது இணைவுப் புள்ளி ஆகும்.

$\therefore$ வீச்சம் $= 3a - 2a$

$= a$



இயக்கமையத்தில் துணிக்கையான் வேகம் $v = r\omega$ ஆகும்.

$$v = a\left(\sqrt{\frac{g}{a}}\right) = \sqrt{ag}$$

இப்போது நீள் கணக்காக்கம்.

ஆரம்பக்கிப்பு வேகம்.

(C இல் வேகம் 3 மடங்கு அதிகப்படுத்தி எனக் கூறப்பட்டுள்ளது)

$\therefore$ C இல் வேகம் $V_0 = 3\sqrt{ag}$

"இயக்கமையம் C இல் வேகம் அதிகப்படுவதும்.

இயக்கமையம் மாறாது துணைப் வீச்சம் மாறும்"

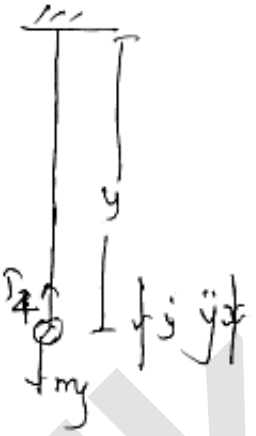
எனவே புதிய SHM இல் இயக்கமையம் C ஆகும்.

C இல் வேகம் $V_0 = (\text{வீச்சம்})(\text{கோணவெல்})$

$$3\sqrt{ag} = (b)\left(\sqrt{\frac{g}{a}}\right) \quad \therefore b = 3a.$$

புதிய இயக்கத்தின் வீச்சம் $(b) = 3a$ ஆகும்

method – II C இல் கணத்தாக்கம் உபயோகிய பின்னர்.



$$mg - T_4 = m\ddot{y}$$

Hook's law

$$T_4 = \frac{mg(y-a)}{a}$$

$$mg - \frac{mg(y-a)}{a} = m\ddot{y}$$

$$\ddot{y} = -\frac{g}{a}(y-2a)$$

$$Y = y - 2a$$

$$\dot{Y} = \dot{y}$$

$$\ddot{Y} = \ddot{y}$$

$$\ddot{Y} = -\omega_1^2 y \quad \text{இல் } \omega_1 = \sqrt{g/a}$$

இது SHM ஆகும்

~~புதிய இ~~

புதிய SHM இன் இயல்பை மையம் C ஆகும்.

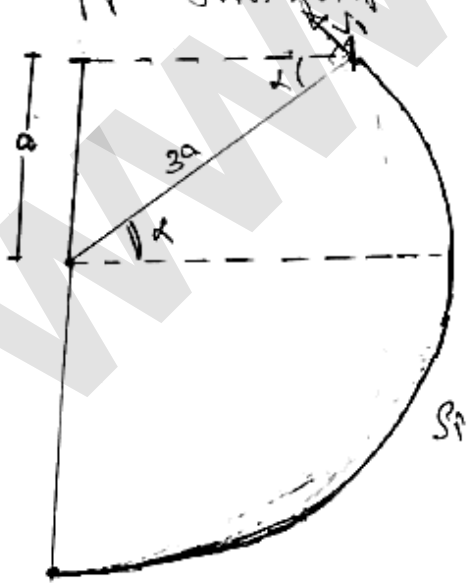
∴ ~~வீச்சம்~~ $y = 2a$ ஆகும் $\dot{y} = 3\sqrt{ag}$.

$$\dot{y} = r\omega$$

$$3\sqrt{ag} = b\sqrt{g/a}$$

$$b = 3a \quad (\text{வீச்சம்})$$

புதிய இயல்பிலிருந்து வீச்சம் $(b) = 3a$ ஆகும்.



"வீச்சம் a ஆன் கொண்ட SHM"

D → C வரை கொள்ள

ஆகும் $t_1 = \frac{\pi}{2}/\omega$

$= \frac{\pi}{2}\omega$

C → A வரை கொள்ள

ஆகும் $t_2 = \alpha/\omega$

$= \frac{1}{\omega}\sin^{-1}(1/3)$

$\sin\alpha = 1/3$

∴ இழை தளர்வதற்கு ஆகும் $= t_1 + t_2$

$= \sqrt{\frac{a}{g}}\left(\frac{\pi}{2} + \sin^{-1}(1/3)\right)$

இழை தளரும் போது $V_1 = r\omega\cos\alpha \quad == 3a\sqrt{\frac{g}{a}}\left(\frac{\sqrt{8}}{3}\right) = \sqrt{8ag}$